

# **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

**В.Н. Лыкосов**

**Московский государственный университет им. М.В.**

**Ломоносова,**

**Факультет вычислительной математики и кибернетики,**

**Кафедра вычислительных технологий и моделирования**

**e-mail: [lykosov@inm.ras.ru](mailto:lykosov@inm.ras.ru)**

## Глава 1. Предварительные сведения

Известно (Монин и Яглом, 1965), что все движения, происходящие в жидкостях и газах, можно разделить на два, резко отличающихся между собой, типа: гладкие течения, которые называют *ламинарными*, и их противоположность – *турбулентные* течения, характеристики которых (скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины) беспорядочно пульсируют, крайне нерегулярно изменяясь в пространстве и во времени. На рис. 1.1 приведены типичные записи измерений пульсаций продольной (вдоль направления основного потока)  $u'$  и вертикальной  $w'$  компонент скорости ветра, сделанных с помощью акустического анемометра в приземном слое атмосферы вблизи заснеженной поверхности в различных метеорологических условиях (Lykossov and Wamser, 1995).

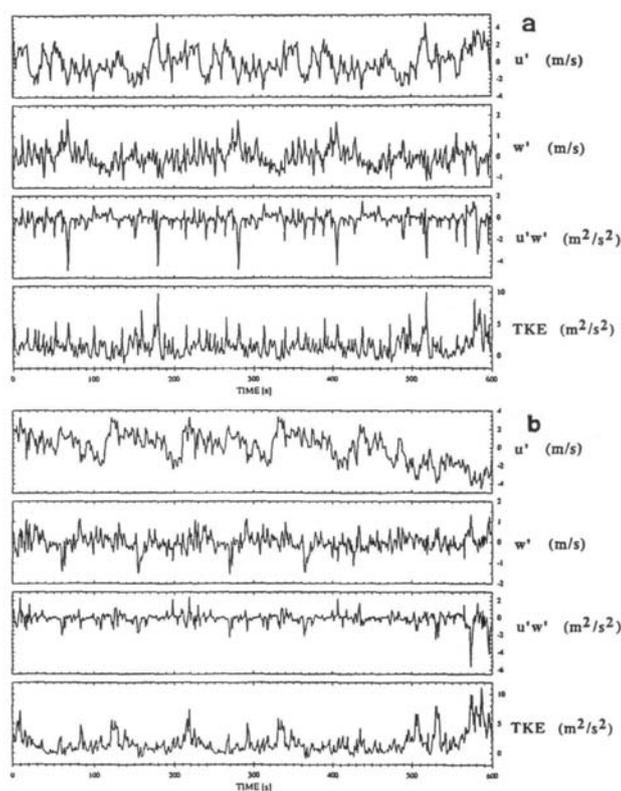


Рис. 1.1. Примеры временных рядов пульсаций скорости  $u'$ ,  $w'$ , вертикальной компоненты потока импульса  $u'w'$  и энергии  $TKE = (u'^2 + v'^2 + w'^2)/2$  в условиях снежной метели (а) и без нее (б).

Сложный характер изображенных на рис. 1.1 кривых (большое количество пульсаций различных периодов и амплитуд) свидетельствует о том, что в обоих случаях движение воздуха было турбулентным, хотя и несколько отличающимся в деталях в зависимости от метеорологической обстановки. Важным отличием турбулентного течения от ламинарного является то, что турбулентное движение обладает гораздо большей способностью к передаче импульса, тепла и пассивных примесей (в частности, взвешенных частиц естественного происхождения – пыли, песка и снега), к распространению химических реакций, в том числе горения при лесных пожарах. Наконец, поскольку турбулентные течения характеризуются существенными внутренними неоднородностями, то они способны рассеивать проходящие через атмосферу и океан звуковые и электромагнитные волны, генерируя пульсации их амплитуд и фаз.

Подавляющее большинство встречающихся в природе и технике течений является турбулентным, в то время как ламинарные течения представляют собой лишь довольно редкое исключение. Атмосферная турбулентность, проявляющаяся в самых разнообразных формах – от конвекции в пограничном слое и до общей циркуляции планетарного масштаба, играет основную роль в процессах переноса тепла и влаги воздушными массами, в испарении влаги с поверхности почвы и водоемов, в зарождении ветровых волн на поверхности моря и образовании под воздействием ветра течений в океане, в болтанке самолетов и других летательных аппаратов и т.д. К числу турбулентных относятся также течения в реках, озерах, морях и океанах и практически все имеющие большое прикладное значение течения в трубах – в водопроводах, газопроводах, нефтепроводах, соплах реактивных двигателей и т.п. Турбулентными являются также движения газов во Вселенной на масштабах, значительно превышающих земные (рис. 1.2).

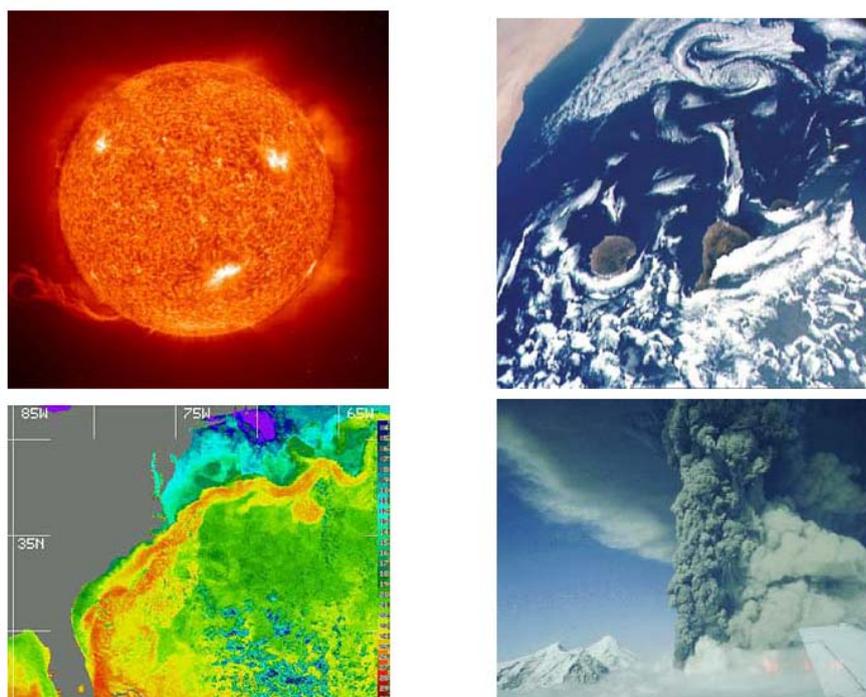


Рис. 1.2. Примеры турбулентных течений на поверхности Солнца, в атмосфере Земли, в Гольфстриме (на поверхности Атлантического океана) и при извержении вулкана (снимки: NASA – Национальная администрация по авиации и космосу, NOAA – Национальная администрация по океану и атмосфере и USGS – Геологическая служба США).

С теоретической точки зрения турбулентные течения представляют собой примеры нелинейных динамических систем с очень большим количеством степеней свободы. Движения в любой непрерывной среде можно описать бесконечным числом обобщенных координат, в качестве которых можно, например, принять коэффициенты разложения поля скорости по какой-либо полной системе функций от пространственных координат. В случае ламинарных движений эти координаты зачастую можно выбрать таким образом, что лишь небольшое число отвечающих им степеней свободы будет участвовать в движении. В турбулентном же движении возбужденным оказывается огромное число степеней свободы, так что изменение во времени любой физической величины описывается функциями от большого числа компонент Фурье (см. рис. 1.1). Практически невозможно описать индивидуальные изменения во времени всех обобщенных координат и целесообразно привлечь *статистический* подход, опирающийся на изучение

специфических статистических закономерностей, присущих большим совокупностям однотипных объектов.

Есть определенная аналогия между статистической теорией турбулентности и кинетической теорией газов, изучающей системы из очень большого числа взаимодействующих между собой молекул. В обеих теориях точное описание эволюции исследуемой системы теоретически безнадежно, но вместе с тем имеется принципиальное различие. Оно связано с тем, что суммарная кинетическая энергия совокупности движущихся молекул не меняется во времени (при обычно принимаемых предположениях о молекулярных взаимодействиях), а при движениях реальной жидкости ее кинетическая энергия диссипирует в теплоту под действием вязкости. Кроме того, молекулярные ансамбли дискретны по своей природе и их временная эволюция описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, в то время как в гидродинамике рассматриваются движения непрерывной среды, описываемых уравнениями в частных производных.

Одним из самых ранних описаний турбулентности можно считать принадлежащее перу Леонардо да Винчи (Lumley, 1992): «Наблюдаемое течение поверхности воды напоминает двоякое движение волос, одно из которых обусловлено их весом, а другое – направленностью их локонов; таким образом, в воде возникают завихренные движения, одна часть которых обусловлена основным течением, а другая – случайными и обратными течениями» (см. рис. 1.3).

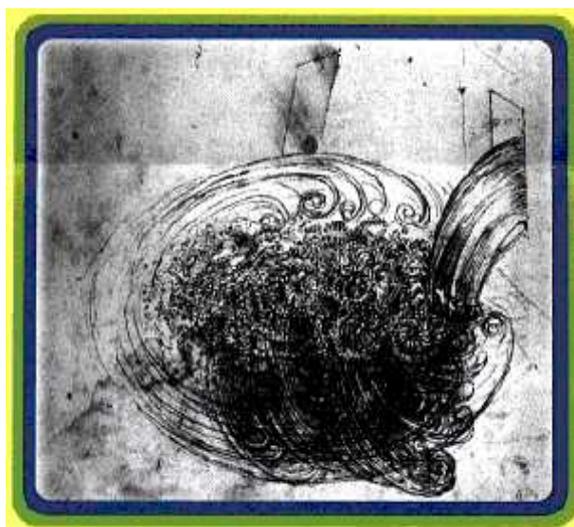


Рис. 1.3. Турбулентность по Л. да Винчи.

Поэтическая формулировка турбулентности была дана А.С. Пушкиным в стихотворении «Зимний вечер» (1825):

Буря мглою небо кроет,  
Вихри снежные крутя;  
То, как зверь, она завоет,  
То заплачет, как дитя...

Знаменитый английский ученый Льюис Ричардсон в книге, опубликованной в 1922 г., впервые высказал предположения о том, что развитая турбулентность представляет собой

иерархию вихрей (т.е. неоднородностей потока) разных размеров, в которой вихри данного порядка иерархии возникают за счет потери устойчивости более крупных вихрей предыдущего порядка, получают от них энергию и, в свою очередь, теряют устойчивость, порождая более мелкие вихри следующего порядка и передавая им свою энергию. Таким образом, возникает «каскадный процесс», с помощью которого энергия крупномасштабного потока в результате реализации сдвиговой неустойчивости последовательно передается движениям все более и более мелких масштабов, достигая некоего минимального масштаба, на котором вязкость среды играет существенную роль и происходит заметная диссипация кинетической энергии в теплоту (Монин и Яглом, 1965). Соответствующую физическую картину развитой турбулентности Ричардсон описал следующим английским четверостишьем:

Big whirls have little whirls,  
which feed on their velocity.  
Little whirls have lesser whirls,  
and so on to viscosity.<sup>1</sup>

### 1.1. Физические свойства турбулентности

Можно сформулировать несколько критериев, позволяющих в ходе наблюдений за движениями в природной среде определить, является ли течение турбулентным (Ferrari, 2004). Первый из них состоит в том, что турбулентные течения характеризуются структурами с пространственными и временными масштабами, изменяющимися в широком диапазоне. Если  $L$  - масштаб длины наибольшего из движений, а  $l$  - соответствующий масштаб наименьшего из движений, то в турбулентном течении  $L \gg l$ . Масштаб  $l$  - это масштаб, на котором становятся важными процессы диссипации, приводящие к потере энергии течения. Этот масштаб может быть оценен в следующем виде:  $l = \nu/U$ , где  $\nu$  - коэффициент молекулярной вязкости, а  $U$  - характерная скорость течения. Соотношение  $L \gg l$  означает, что число Рейнольдса  $Re \equiv UL/\nu$  велико для турбулентных течений.

В формировании и поддержании турбулентности доминируют нелинейные процессы. В турбулентном течении движения различных масштабов взаимодействуют между собой через нелинейные (квадратичные) члены в уравнениях движения. Эти нелинейные взаимодействия ответственны за присутствие структур большого количества различных масштабов. В поле невзаимодействующих линейных внутренних волн с большим числом разных частот и волновых чисел тоже наблюдается широкий диапазон масштабов длины, но он, в отличие от турбулентности, обусловлен внешними вынуждающими силами или граничными условиями.

Далее, турбулентные течения, вообще говоря, не предсказуемы в пространстве и времени. Даже если были бы известны точные уравнения, описывающие эволюцию течения, ее невозможно предсказать во всех деталях в силу того, что турбулентное течение чувствительно к начальным и граничным условиям, что является результатом его сильной нелинейности. Это – фундаментальное свойство *хаотических* систем. Вместе с тем, нужно различать турбулентность и хаос. Хаотические движения не обязательно принадлежат к турбулентным, поскольку хаос может реализоваться и на малом числе степеней свободы, т.е. иметь «узкий» спектр в пространстве и времени. Имеется ряд примеров хаотических

---

<sup>1</sup> Крупные завихрения рожают мелкие завихрения, питающиеся за счет их скорости; мелкие завихрения рожают еще меньшие завихрения, и так далее до начала действия вязкости.

систем, характеризующихся сложным поведением во времени, но простой пространственной структурой (например, система Лоренца – Lorenz, 1962).

Наконец, турбулентные течения необратимы во времени. Турбулентные течения имеют тенденцию забывать свои начальные условия и достигать некоторого равновесного состояния. Турбулентность способна перемешивать субстанции, но с ее помощью нельзя восстановить исходное (не перемешанное) состояние.

## 1.2. Основные уравнения динамики жидкости

Турбулентность принадлежит к числу сложных физических явлений, изучение которых невозможно без привлечения уравнений гидротермодинамики, отражающих основные законы физики. Подробное изложение этого вопроса можно найти, в частности, в книгах Кочина, Кибеля и Розе (1963) и Ландау и Лифшица (1953). Состояние жидкости, под которой понимается любая жидкая или газообразная среда, можно охарактеризовать векторным полем скорости  $\vec{u}(\vec{x}, t) = \{u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t)\}$  и полями двух термодинамических характеристик – например, полем давления  $p(\vec{x}, t)$  и плотности  $\rho(\vec{x}, t)$ . Простейшим уравнением гидромеханики, выражающим физический закон вещества, является уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0 \quad (1.1)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{u}. \quad (1.2)$$

Основные уравнения, выражающие второй закон Ньютона в применении к малому объему жидкости и описывающие баланса импульса, можно записать покомпонентно в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u_i \vec{u} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \nu \Delta u_i, \quad (1.3)$$

где  $\rho F_i = \rho F_i(\vec{x}, t)$  есть  $i$ -ая компонента плотности внешних сил, а  $\nu$  - коэффициент (кинематической) вязкости. Используя уравнение неразрывности (1.2), уравнения (1.3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (1.4)$$

Во многих практических случаях изменения плотности  $\rho$  движущейся жидкой частицы оказываются настолько малыми, что ими можно пренебречь. Тогда в уравнении неразрывности (1.2) слагаемыми в левой части можно опустить, после чего оно приобретает вид

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.5)$$

Из внешних сил наиболее существенными для геофизических приложений являются сила тяжести и эффекты, связанные с вращением Земли, так что во многих случаях можно принять

$$\vec{F} = -g\vec{n} - f\vec{n} \times \vec{u}, \quad (1.6)$$

где  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $f = 2\Omega \sin \varphi$  - параметр Кориолиса ( $\Omega$  - угловая скорость вращения Земли,  $\varphi$  - широта).

Для сжимаемой среды выписанная система из четырех уравнений (баланса массы и баланса трех компонент импульса) содержит пять неизвестных функций и в связи с этим возникает проблема их замыкания. Для получения замкнутой системы используется дополнительное, пятое, уравнение притока тепла, выражающего физический закон сохранения энергии (см. Ландау и Лифшиц, 1951). В случае идеального газа, уравнение состояния которого имеет вид

$$p = R\rho T,$$

где  $T$  – температура в градусах Кельвина, а постоянная  $R$  равна разности удельных теплоемкостей среды при постоянном давлении  $c_p$  и при постоянном объеме  $c_v$  ( $R = c_p - c_v$ ) уравнение притока тепла может быть записано следующим образом:

$$c_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \rho c_p \chi \nabla^2 T + \rho c_p Q, \quad (1.7)$$

где  $\chi$  - коэффициент молекулярной диффузии (температуропроводности в данном случае), а  $Q$  – суммарный приток тепла, обусловленный переходом части кинетической энергии в теплоту в результате работы сил трения (в реальных условиях обычно играет незначительную роль и им можно пренебречь), радиационными процессами, фазовыми превращениями, химическими реакциями и т.п.

Для жидкости роль уравнения состояния играет закон ее теплового расширения

$$\rho - \rho_0 = -\lambda(T - T_0),$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  - плотности при температурах  $T$  и  $T_0$ , соответственно, а  $\lambda$  - коэффициент теплового расширения. При этом условии уравнение притока тепла имеет вид

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) = \lambda T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p \right) + \rho c_p \chi \nabla^2 T + \rho c_p Q,$$

а поскольку коэффициент  $\lambda$  для обычных жидкостей очень мал (для воды  $\lambda \approx 1.5 \times 10^{-4}$  град<sup>-1</sup> при температуре 15<sup>0</sup> C), то в результате получается уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T + Q. \quad (1.8)$$

По своему виду это уравнение при  $Q = 0$  совпадает с уравнением диффузии, описывающем изменение концентрации некоторой пассивной (не оказывающей влияния

на динамику потока) примеси в рассматриваемой среде.

### 1.3. Приближение Буссинеска

При исследовании многих геофизических процессов полезным оказалось использование так называемого приближения Буссинеска, главная идея которого заключается в том, что зависимость плотности от температуры учитывается лишь в одном слагаемом уравнений движения, а именно в слагаемом с объемной силой  $\rho g \vec{n}$ . В остальных же слагаемых, куда входит плотность, предполагается, что  $\rho = \rho_0 = const$ . Считается, что плотности  $\rho_0$  соответствует некоторое гидростатическое распределение давления  $p_0(x_3)$ , удовлетворяющее уравнению

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x_3} = -g. \quad (1.9)$$

Предполагается также, что температура рассматриваемой среды мало отклоняется от некоторого характерного для нее среднего значения  $T_0$ . Поэтому выражение для зависимости плотности от температуры можно представить в виде

$$\rho(T) = \rho(T_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0} (T - T_0).$$

Если ввести коэффициент теплового расширения

$$\lambda = - \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0},$$

то

$$\rho(T) = \rho_0 \left[ 1 - \frac{\lambda}{\rho_0} (T - T_0) \right]. \quad (1.10)$$

Соотношение (1.10) показывает, что и плотность среды мало отличается от ее характерного значения  $\rho_0$ , что позволяет записать уравнения гидротермодинамики несжимаемой среды в так называемом приближении Буссинеска следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \vec{u} + b \vec{n} - \vec{f} \vec{n} \times \vec{u}, \\ \frac{\partial b}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) b &= \chi \nabla^2 b, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $b = -g(\rho - \rho_0)/\rho_0$  - плавучесть, а  $\pi = (p - p_0)/\rho_0$ . В дальнейшем удобно иногда будет вместо вектора  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  использовать координаты  $(x, y, z)$ , направленные, соответственно на восток, север и вертикально вверх, а компоненты вектора  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  записывать как  $(u, v, w)$ . Уравнения (1.11) должны быть дополнены граничными и

начальными условиями. В первом из уравнений (1.11) – уравнении движения - слагаемое  $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$  описывает эффекты, связанные с силами инерции, первое слагаемое в правой части – с силами давления, второе – с трением, следующее слагаемое  $b\vec{n}$  - с силами плавучести и, наконец, последнее слагаемое – с силой Кориолиса. Второе уравнение представляет собой уравнение переноса плавучести, причем слагаемое  $(\vec{u} \cdot \nabla)b$  описывает ее адвекцию, а слагаемое в правой части уравнения – диффузию плавучести.

В случае отсутствия трения и диффузии, а также в предположении, что на контуре рассматриваемой (скажем, ограниченной) области нормальная составляющая скорости обращается в ноль, эти уравнения обладают интегральными законами сохранения для энергии и различных степеней  $b^m$  плавучести и других ее функционалов. При наличии сил трения и диффузии, энергия и изменчивость плавучести удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -D, \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -D_B, \quad (1.12)$$

где

$$(B, E, D_B, D) = \iiint d\vec{x} (b^2, e, \varepsilon_b, \varepsilon) \quad (1.13)$$

и

$$e = \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} - bz, \quad \varepsilon_b = \chi \nabla b \cdot \nabla b, \quad \varepsilon = \nu \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u}. \quad (1.14)$$

При выводе соотношений (1.12) предполагалось, что отсутствуют потоки энергии и плавучести через границы области, так что интегральные характеристики течения могут лишь уменьшаться со временем под влиянием молекулярных вязкости и диффузии. Сами же уравнения (1.1) представляют собой уравнения в частных производных, точные решения которых в общем виде неизвестны. Поэтому численное моделирование является единственным на настоящее время инструментом, позволяющим получать частные решения.

При рассмотрении конкретных турбулентных течений систему уравнений (1.11) можно в ряде случаев еще упростить, пренебрегая теми или иными членами, относительную роль которых можно оценить в терминах безразмерных – «именных» - чисел. Так например, число Рейнольдса

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.15)$$

характеризует отношение сил инерции и трения. В турбулентных течениях  $Re \gg 1$  и адвекция доминирует, что свидетельствует о преобладающем влиянии нелинейной динамики и хаотической эволюции. Типичные значения молекулярной вязкости  $\nu$  равны  $1.5 \times 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/сек для воздуха и  $1 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/сек для воды. Эти значения достаточно малы, чтобы при типичных значениях скорости  $U$  обеспечить  $Re \gg 1$  на всех пространственных

масштабах  $L$  от микромасштаба (порядка 1 мм) до планетарного (порядка  $10^4$  км). При  $U = 1$  м/сек и  $L = 10^3$  м число Рейнольдса лежит в диапазоне от  $10^9$  до  $10^{10}$ . Вместе с тем, необходимо подчеркнуть, что имеется существенная разница в решениях при  $Re \rightarrow \infty$  и в случае уравнений Эйлера ( $\nu = 0$ , т.е.  $Re = \infty$ ) в силу того, что диссипация контролирует процессы преобразования энергии турбулентного течения.

Относительная роль адвекции и диффузии в переносе плавучести (а также пассивной примеси) может быть охарактеризована числом Пекле

$$Pe = \frac{UL}{\chi}, \quad (1.16)$$

которое является аналогом числа Рейнольдса для примеси. При больших числах Пекле доминируют процессы адвекции, но решение при  $Pe \rightarrow \infty$  существенно отличается от случая  $Pe = 0$  в силу того, что диффузия контролирует процесс удаления мелкомасштабных структур в поле примеси.

Относительная роль диссипации и диффузии характеризуется числом Прандтля

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}. \quad (1.17)$$

Если ввести временной масштаб диссипации  $T_\nu = L^2 / \nu$  и диффузии  $T_\chi = L^2 / \chi$ , то число Прандтля можно выразить в виде отношения этих двух масштабов:  $Pr = T_\nu / T_\chi$ . Это число является характеристикой среды, а не конкретного течения. Для воздуха и воды его значения равны 0.7 и 12.2, соответственно.

Отношение сил инерции и Кориолиса выражается с помощью числа Россби

$$Ro = \frac{U}{fL}. \quad (1.18)$$

Случай  $Ro \gg 1$  характеризует турбулентность, для которой эффекты вращения не существенны, в то время как при  $Ro \leq 1$  движения в жидкости происходят под сильным влиянием вращения.

Взаимная роль плавучести и диффузии определяется числом Рэлея

$$Ra = \frac{L^3 \Delta b}{\chi \nu}. \quad (1.19)$$

При конвекции движения в жидкости генерируются за счет неустойчивой вертикальной стратификации плотности ( $\partial b / \partial z < 0$ ). Число Рэлея представляет собой отношение временных масштабов диффузии  $T_\chi = L^2 / \chi$  и плавучести  $T_b = (L / \Delta b)^{1/2}$ , где масштаб плавучести  $\Delta b$  есть разность в ее значениях, поддерживаемых внешними источниками на границах слоя толщины  $L$ . Если конвекция поддерживается разностью температур  $\Delta T$ , то  $\Delta b = g \alpha \Delta T$ , где  $\alpha$  - коэффициент термического расширения жидкости или газа. Конвекция начинается, если  $T_\chi \gg T_b$ , т.е. если  $RaPr \gg 1$  (диффузия происходит слишком медленно, чтобы существенно повлиять на плавучесть частиц воды или газа при их подъеме).

Соотношение между силами плавучести и инерции выражается градиентным числом Ричардсона

$$Ri = \frac{\partial b / \partial z}{|\partial \bar{u} / \partial z|^2}. \quad (1.20)$$

В случае устойчивой плотностной стратификации ( $\partial b / \partial z > 0$ ) вертикальные движения выражены слабо, но турбулентность может все же существовать, если имеется достаточно энергии за счет поля горизонтальной скорости. Полезным для оценки течения в этих условиях параметром является отношение временного масштаба плавучести  $T_b = (L / \Delta b)^{1/2} = (\partial b / \partial z)^{-1/2}$  и характерного времени инерции за счет сдвига горизонтальной скорости  $T_i = L / U = |\partial \bar{u} / \partial z|^{-1}$ , причем  $Ri = (T_i / T_b)^2$ . Если  $Ri \ll 1$ , то плавучестью можно пренебречь в уравнениях движения и ее можно рассматривать как пассивную примесь без обратного влияния на динамику.

В представленных выше безразмерных параметрах отсутствует сила давления, которая формально может быть исключена из рассмотрения. Если взять оператор дивергенции от обеих частей первого из уравнений (1.11) и воспользоваться тем, что в силу уравнения неразрывности  $\nabla \cdot \partial \bar{u} / \partial t = 0$ , то можно получить следующее диагностическое соотношение

$$\nabla^2 \pi = \rho_0 \nabla \left[ -(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nu \nabla^2 \bar{u} + b \bar{n} - f \bar{n} \times \bar{u} \right]. \quad (1.21)$$

#### 1.4. Двойственность турбулентности

При исследовании турбулентности оказывается полезным рассматривать ее в терминах двойственности (McWilliams, 2006).

1. Детерминированность – случайность. Хотя сами по себе уравнения детерминированные, их решения имеют многие атрибуты случайных процессов.
2. Упорядоченность – хаос. Многие из пространственных и временных распределений имеют упорядоченную картину, но в целом их поведение отчетливо хаотично.
3. Обратимость – необратимость (во времени). Если пренебречь слагаемыми, содержащими  $\nu$  и  $\mu$  (поскольку числа Рейнольдса  $Re$  велики), то уравнения становятся обратимыми во времени, т.е. любые решения  $(t, \bar{u}, b, p)$  совпадают с решениями  $(-t, -\bar{u}, b, p)$ . В противоположном случае имеет место необратимость (задача становится не корректной по Адамару). Нарушение симметрий – особенность турбулентных движений, часто не акцентируемая в обсуждениях.
4. Сохранение материального объема – дисперсионность. Материальные частицы, изначально близкие друг к другу, стремятся со временем «разбежаться». Турбулентность перемешивает примесь, но не способна восстановить изначальное состояние.
5. Консервативность – неконсервативность. Если пренебречь молекулярными эффектами

( $\nu$  и  $\mu$ ), то уравнения обладают интегральными законами сохранения (энергии, изменчивости примеси и т.п.), но турбулентность действует как диссипативный фактор (работает второй закон термодинамики). В геофизических средах, где вынуждающие силы имеют крупномасштабный характер, наблюдается непрерывный перенос свойств жидкости от больших масштабов к малым – вплоть до тех, на которых диффузионные члены становятся сравнимыми с адвективными. Этот процесс называется прямым (т.е. в направлении малых масштабов) *турбулентным каскадом*.

6. Квазипериодические и пространственно гладкие решения – нерегулярные и не гладкие. Турбулентность развивается в широком спектре временных и пространственных Фурье-гармоник в  $(\omega, \vec{k})$  - пространстве ( $\omega$  – частота,  $\vec{k}$  - волновой вектор), даже если начальные условия и вынуждающие силы достаточно гладкие. Спектры атмосферных и океанических движений могут иметь пики на определенных временных и пространственных масштабах, но в целом, являются достаточно широкими, отражая значимые энергетические вклады большого числа гармоник (например, спектр приземного атмосферного ветра или спектр внутренних волн в океане). Спектры часто можно аппроксимировать степенными зависимостями от частоты или волнового числа (в частности, знаменитый закон  $k^{-5/3}$  Колмогорова, описывающий каскад в трехмерной турбулентности, или частотный спектр  $\omega^{-5}$  поверхностных волн в открытом океане).

7. Предсказуемость – не предсказуемость. Характеристики турбулентного течения предсказуемы лишь на ограниченном интервале времени, величина которого пропорциональна  $L/U$ . С другой стороны статистические свойства течения могут быть достаточно устойчивыми и таким образом, в принципе предсказуемы. Эта ситуация напоминает термодинамику: если привести в контакт два тела разных температур, то можно предсказать их установившуюся температуру, но не траекторию каждой молекулы, участвовавшей в теплообмене.

8. Чувствительность – не чувствительность. Задача турбулентной динамики жидкости, сформулированная в терминах уравнений в частных производных, плохо обусловлена в классическом смысле: малые изменения в ее формулировке (начальные и граничные условия, параметры модели и т.п.) приводят зачастую к большим макроскопическим изменениям в решении после некоторого конечного промежутка времени, называемого временем предсказуемости.

9. Статистическая регулярность – не регулярность. Некоторые статистические характеристики турбулентности имеют приблизительно гауссово распределение вероятностей, но в целом структура турбулентных полей сильно негауссова с проявлениями редких, но интенсивных, выбросов.

10. Глобальная упорядоченность – локальная упорядоченность. Глобальная упорядоченность редко проявляется при больших числах Рейнольдса, если только это не задано упорядоченным полем вынуждающих сил или геометрией области. Но локальная упорядоченность, в частности поля завихренности, является почти универсальным свойством турбулентности и проявляется в виде *когерентных структур*.

11. Устойчивые картины течений – изменяющиеся и хаотически повторяющиеся картины. Очевидная упорядоченность картин течения обычно сопровождается значительной изменчивостью. Когерентные структуры появляются и исчезают в непредсказуемой последовательности.

В реальных турбулентных движениях ни одна из перечисленных пар антонимов не выполняется в «чистом» виде. При изучении турбулентности важно понять, как происходит переход от одного утверждения какого-либо антонима к его противоположности. В атмосфере и океане реализуются разнообразные комбинации физических условий, при которых возникает турбулентность, проявляющаяся в виде различных ее режимов. Все они существуют при  $Re \gg 1$ .

1. Однородная пространственно изотропная турбулентность с  $b = 0$  и  $f = 0$ .
2. Геострофическая турбулентность, возникающая в присутствии вращения и устойчивой стратификации при  $Ro \sim Ri^{-1/2}$  и  $Ro \leq 1$ . Этот режим включает также случаи, связанные с пространственной изменчивостью силы Кориолиса ( $\beta = \partial f / \partial y$ ) и с рельефом.
3. Сдвиговая турбулентность, обусловленная сдвигом среднего потока  $\nabla \bar{u}$ .
4. Стратифицированная турбулентность в присутствии наложенной на поток (устойчивой) стратификации плотности (а значит, и плавучести) при  $Ri \geq 1$ .
5. Конвекция при неустойчивой стратификации плавучести в среднем потоке ( $\partial \bar{b} / \partial z < 0$ ) и  $Ra \geq 1$ .
6. Турбулентность в пограничном слое, располагающемся вблизи твердой (подстилающей) поверхности, через которую отсутствует перенос массы, но есть поток импульса и/или поток плавучести. Этот режим может проявляться в виде сдвиговой, стратифицированной или конвективной турбулентности, но контролирующие его параметры определяются граничными условиями на подстилающей поверхности.
7. Волновая турбулентность, возникающая в присутствии слабо нелинейных волн: поверхностные или внутренние гравитационные волны, инерционные волны, волны Россби и т.д. с  $ak \ll 1$  и  $Uk \ll 1$ , где  $a$  - амплитуда волны и  $(\omega, k)$  - частота и волновое число.

## 1.5. Симметрии

Уравнения (1.11) обладают рядом симметрий, т.е. не меняют свой вид при определенных заменах переменных. С их помощью полезно классифицировать и интерпретировать геофизические течения. Если пренебречь на время эффектами плавучести и вращения (положить  $b = 0$  и  $f = 0$ ), то математические симметрии уравнений Буссинеска выглядят следующим образом.

1. Сдвиг в пространстве:  $(t, \bar{x}, \bar{u}) \rightarrow (t, \bar{x} + \delta \bar{x}, \bar{u})$
2. Сдвиг по времени:  $(t, \bar{x}, \bar{u}) \rightarrow (t + \delta t, \bar{x}, \bar{u})$
3. Преобразование Галилея:  $(t, \bar{x}, \bar{u}) \rightarrow (t, \bar{x} + t \delta \bar{u}, \bar{u} + \delta \bar{u})$
4. Поворот в пространстве:  $(t, \bar{x}, \bar{u}) = (t, A \bar{x}, A \bar{u})$
5. Частичная обратимость:  $(t, \bar{x}, \bar{u}) \rightarrow (t, -\bar{x}, -\bar{u})$
6. Для консервативных систем

- обратимость во времени:  $(t, \bar{x}, \bar{u}) \rightarrow (-t, \bar{x}, \bar{u})$

- масштабирование:  $(t, \bar{x}, \bar{u}) \rightarrow (\lambda^{1-n}t, \lambda\bar{x}, \lambda^n\bar{u})$

7. Для диссипативных систем

- масштабирование:  $(t, \bar{x}, \bar{u}) \rightarrow (\lambda^2t, \lambda\bar{x}, \lambda^{-1}\bar{u})$

Как правило, турбулентные движения возникают в ламинарном потоке при нарушении или восстановлении одного или более типов симметрий: симметрии «ломаются» в детерминистическом смысле, но восстанавливаются в статистическом описании.

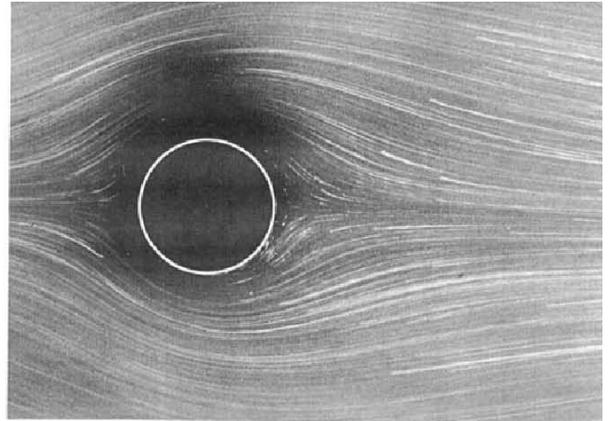
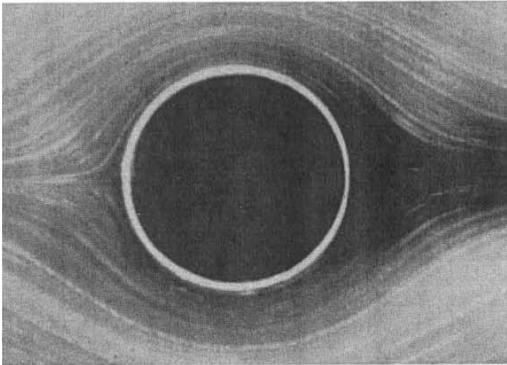


Рис. 1.4. Слева: симметричная картина линий тока при обтекании кругового цилиндра при  $Re=0.16$ . Справа: нарушение симметрии линий тока в случае  $Re=1.54$  (Ван-Дайк, 1986).

На рис. 1.4 изображены линии тока при обтекании кругового цилиндра однородным потоком для относительно малых ( $Re=0.16$ ) и сравнительно больших ( $Re=1.54$ ) чисел Рейнольдса, демонстрирующие нарушение симметрии потока при увеличении числа  $Re$ . Картина расположения линий тока на левом рисунке с трудом позволяет определить, что поток движется слева направо. Это объясняется тем, что в пределе нулевого числа Рейнольдса обтекание твердого тела обратимо и, следовательно, симметрично при симметричной форме тела. При  $Re=1.54$  картина линий тока, очевидно, уже потеряла ту симметрию передней и задней частей, которая имела место при  $Re=0.16$ .

В геофизических течениях, в целом, не наблюдаются в достаточно выраженном виде ни одна из перечисленных симметрий как из-за наличия эффектов плавучести и вращения, так и влияния несимметричных внешних возбуждающих сил и граничных условий. Тем не менее, симметрии могут с хорошей точностью проявляться локально.

## Глава 2. Гидродинамическая неустойчивость и возникновение турбулентности

Как известно (Монин и Яглом, 1965), наблюдаемые течения жидкости могут принадлежать двум, резко различающимся, классам: плавные и спокойные течения, меняющиеся во времени лишь в связи с изменением действующих сил и внешних условий и которые называются ламинарными, и *турбулентные* течения, которые сопровождаются беспорядочными флуктуациями всех гидродинамических полей во времени и пространстве. Общий критерий возникновения турбулентности был установлен Рейнольдсом (1883) на основе соображений о подобии течений вязкой жидкости. Этот критерий заключается в том, что поток остается ламинарным до тех пор, пока число Рейнольдса  $Re = UL/\nu$  не превосходит некоторого критического значения  $Re = Re_{cr}$ , а при  $Re > Re_{cr}$  становится турбулентным. Переход к турбулентности происходит потому, что малые возмущения в ламинарном течении более не подавляются вязкостью, а начинают расти за счет энергии основного потока. Этот процесс легко визуализируется, наблюдая обычное истечение воды из крана: при медленном его открытии течение воды вначале очень гладкое, по крайней мере, вблизи носика, но с усилением струи на ее поверхности возникают волны или рябь с нарастающей вниз по течению интенсивностью. Со временем эти возмущения становятся настолько сильными, что поток распадается на отдельные капли. Этот процесс – проявление так называемой капиллярной неустойчивости, обусловленной поверхностным натяжением, но независимо от типа неустойчивости происходит одно и то же: изначально малые возмущения усиливаются настолько, что ламинарное течение перестает быть таковым. Первые измерения критического числа Рейнольдса были выполнены при исследовании обтекания плоской стеклянной пластинки в первой трети прошлого века (Hansen, 1928), согласно которым  $Re_{cr} \sim 3 \times 10^5 \div 5 \times 10^5$ . Установлено, что значение  $Re_{cr}$ , соответствующее переходу ламинарного течения в турбулентное, оказывается тем меньше, чем больше интенсивность возмущений. Уменьшая с помощью тех или иных приемов степень начальной возмущенности течения, можно задержать переход ламинарного течения в турбулентное до весьма больших чисел Рейнольдса (это явление называется *затягиванием ламинарного режима*).

Ламинарные течения удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса (1.11), предельным стационарным случаем которых является приближение Стокса: нелинейности малы и ими можно пренебречь, а поток определяется балансом между внешними силами и диссипацией. Соответствующее поле скорости полностью предсказуемо и обладает теми же свойствами регулярности, что и внешние силы. По мере того, как число Рейнольдса растет и переходит через критическое значение, нелинейностями пренебречь уже нельзя и в системе происходит бифуркация - возникают совершенно другие решения, в которых проявляются нарушения симметрии начального потока. Так например, стационарное течение, обусловленное независимыми во времени вынуждающими силами, становится периодическим во времени. Как правило, состояние потока после первой бифуркации все еще вполне регулярно. При дальнейшем возрастании числа Рейнольдса это течение также становится неустойчивым, приводя к очередному «сбою» симметрий. Каскад бифуркаций продолжается до тех пор, пока глобальная динамика течения не становится чрезвычайно сложной, т.е. турбулентной. Переход от простого поведения к сложному в моделях часто рассматривается с помощью дискретных отображений (Frisch, 1995, Кузнецов, 2001), позволяющие исследовать процесс наступления хаоса в простых детерминированных системах и понять, как могут проявляться нерегулярные и стохастические решения в течениях жидкости.

Абстрагируясь от конкретной физической природы, турбулентность можно трактовать как процесс, который можно описать с помощью динамических систем. Под *динамической системой* понимается математический объект, который обладает набором *динамических переменных*, характеризующих *состояние* системы, таких, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу, задающего *оператор эволюции* системы (Кузнецов, 2001). Мгновенное состояние системы можно геометрически представить точкой в *фазовом пространстве*, а его изменение времени (динамика системы) представляется в этом пространстве *фазовой траекторией*. В рамках теории динамических систем был получен замечательный результат, связанный с открытием хаотической динамики. В хаотическом режиме сколь угодно малая неточность в задании начального состояния системы быстро нарастает во времени.

## 2.1. Дискретное отображение как пример динамической системы

Если в уравнениях (1.11) пренебречь эффектами плавучести и вращения, а также ввести безразмерные переменные  $t := Ut/L$ ,  $\vec{x} := \vec{x}/L$ ,  $\vec{u} := \vec{u}/U$ ,  $\pi := \pi/U^2$  (где по-прежнему  $L$  и  $U$  – характерные масштабы), то их можно записать в форме уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= -\nabla \pi + \text{Re}^{-1} \nabla^2 \vec{u} + \vec{F}, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение уравнений (2.1) будем искать методом Галеркина в виде разложения в ряд Фурье

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_m a_m(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (2.2)$$

в результате чего возникает бесконечная система дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье:

$$\frac{da_m}{dt} = -\sum_{ij} A_{ijm} a_i a_j - \text{Re}^{-1} |\vec{k}|^2 a_m + F_m, \quad (2.3)$$

где в  $F_m$  включено также слагаемое, связанное с давлением. Каждая мода  $a_m$  в этом уравнении представляет компоненту поля скорости с масштабом длины  $|\vec{k}|$ . Поле скорости на каждом из этих масштабов изменяется за счет нелинейного (квадратичного) взаимодействия с другими модами, линейное трение и воздействие  $F_m$ . Нелинейные взаимодействия контролируются коэффициентами  $A_{ijm}$ , а трение обратно пропорционально масштабу длины и потому наиболее эффективно для мелкомасштабных мод.

Хотя отдельная мода не может взаимодействовать нелинейно сама с собой (коэффициент  $A_{mmm} = 0$ ), целесообразно все же рассмотреть (для иллюстрации роли квадратичной нелинейности) одномодовое приближение, считая, что этот коэффициент отличен от нуля, а  $F_m = 0$ . Тогда будем иметь уравнение

$$\frac{da}{dt} = -Aa^2 - \text{Re}^{-1} |\vec{k}|^2 a, \quad (2.4)$$

описывающее эволюцию единственной моды под воздействием квадратичной нелинейности («адвекции») и линейного трения. Для решения (2.4) воспользуемся простейшим численным методом

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{\tau} &= -Aa_n^2 - \text{Re}^{-1} |\vec{k}|^2 a_n, \\ a_0 &= a_* \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\tau$  - шаг по времени. Уравнение (2.5) можно переписать в виде

$$a_{n+1} = \tau A \left( \frac{1 - \text{Re}^{-1} \tau |\vec{k}|^2}{\tau A} - a_n \right) a_n. \quad (2.6)$$

Если потребовать, чтобы

$$\tau A = 1 - \text{Re}^{-1} \tau |\vec{k}|^2,$$

то уравнение (2.6) переписывается в виде хорошо изученного так называемого *логистического отображения*, а именно

$$a_{n+1} = r a_n (1 - a_n), \quad (2.7)$$

где  $r = 1 - \text{Re}^{-1} \tau |\vec{k}|^2$ . При  $\text{Re} \rightarrow \infty$  коэффициент  $r \rightarrow 1$  снизу; его величина зависит также от волнового числа и шага по времени. Их произведение должно быть меньше  $\text{Re}$ , чтобы величина  $r$  оставалась положительной. Это означает, что при возрастании волнового числа шаг по времени должен уменьшаться, тем самым обеспечивая устойчивость использованной явной схемы.

## 2.2. Бифуркации и хаос

Запишем соотношение (2.7) в виде одномерного отображения  $x_{n+1} = F(x_n)$ , где в данном случае  $F(x) = rx(1-x)$ , и рассмотрим хорошо изученный в литературе случай с  $r > 1$  (см., например, Кузнецов, 2001). Имеем следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0), \\ x_2 &= F(x_1) = F(F(x_0)), \\ &\dots \\ x_n &= F(x_{n-1}) = \dots = F(F \dots (x_0)) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Последовательность точек  $\{x_n\}$  можно рассматривать как траекторию изучаемой системы в фазовом пространстве. Точка пересечения  $x_*$  функции  $y = F(x)$  с функцией  $y = x$  есть неподвижная точка итерационного процесса, если  $F(x_*) = x_*$ . Если теперь задаться начальным условием, близким к  $x_*$ , то будет ли траектория притягиваться к  $x_*$  (в этом случае говорят, что неподвижная точка устойчива) или же уйдет от нее (неустойчивая точка)?

Чтобы ответить на этот вопрос, целесообразно рассмотреть линейризованный случай: записать  $x = x_* + x'$  и использовать разложение в ряд Тейлора:

$$x_{n+1} = x_* + x'_{n+1} = F(x_* + x'_n) \approx F(x_*) + F'(x_*)x'_n, \quad (2.9)$$

так что

$$x'_{n+1} = F'(x_*)x'_n \quad (2.10)$$

и величина  $x'_n$  будет возрастать по модулю в ходе итерационного процесса, если модуль производной  $F'(x_*)$  больше 1. Таким образом, неподвижная точка устойчива при  $|F'(x_*)| < 1$  и неустойчива для  $|F'(x_*)| > 1$ .

В рассмотренном выше отображении при относительно малых значениях  $r$  существует лишь одна устойчивая неподвижная точка  $x_* = (r-1)/r$  и при всех начальных условиях, за исключением  $x_0 = 0$  и  $x_0 = 1$ , траектории притягиваются к этой неподвижной точке (рис. 2.1).

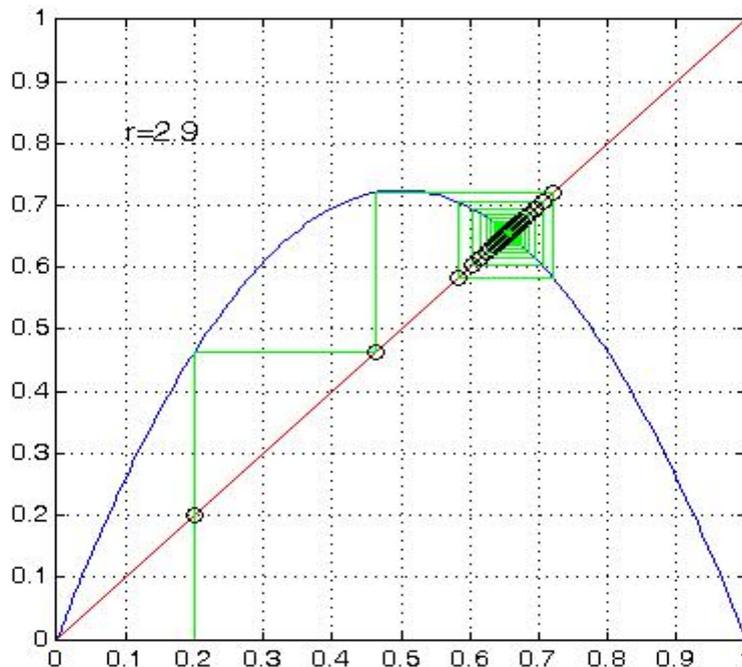


Рис. 2.1. Случай устойчивой неподвижной точки.

Эти решения соответствуют ламинарным течениям при малых числах Рейнольдса. При переходе через значение  $r = 3$  (например, при  $r = 3.2$ ) траектория демонстрирует так называемый предельный цикл с периодом два, в ходе которого решение «перебрасывается» между некоторыми значениями  $x_{*1}$  и  $x_{*2}$ . Функция  $y = F^2(x)$  имеет три пересечения с функцией  $y = x$  и при этом оказывается, что  $|dF^2/dx| < 1$  именно в этих двух точках  $x_{*1}$  и  $x_{*2}$ , т.е. эти точки устойчивы. Третья же неподвижная точка функции  $F^2$  неустойчива, что свидетельствует о возникновении *первой бифуркации* решения. Если теперь положить  $r = 3.5$  и рассчитать итерации  $F$ , то предельный цикл периода 2 в свою очередь становится неустойчивым и траектория образует предельный цикл периода 4.

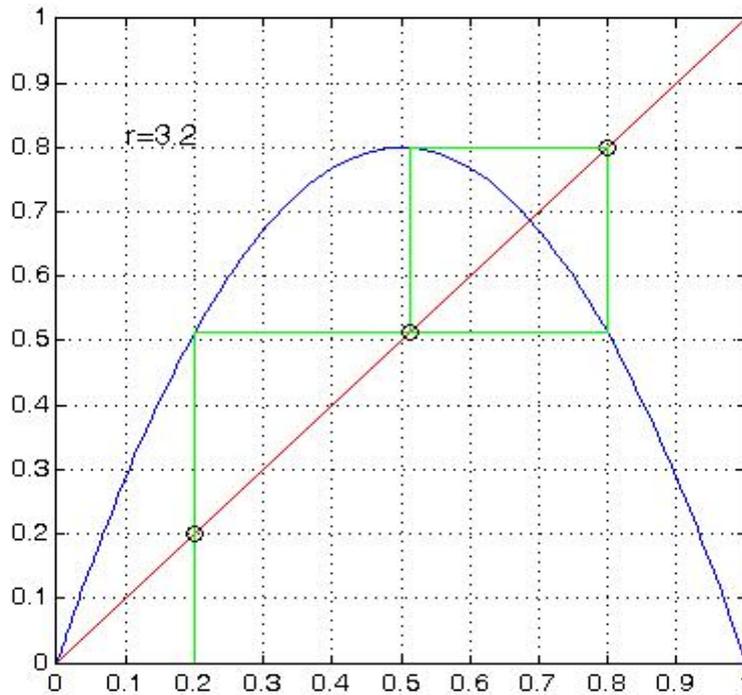


Рис. 2.2. Предельный цикл периода 2.

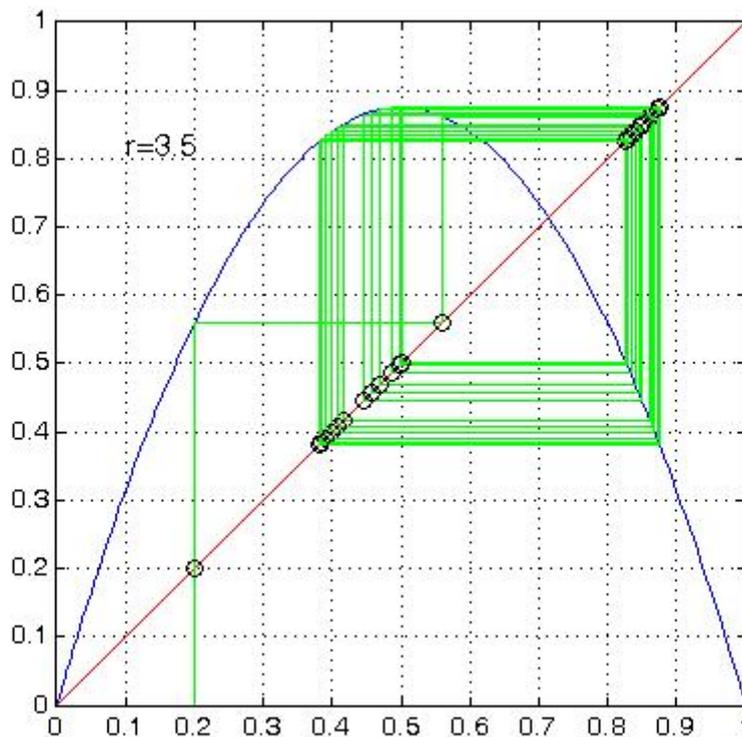


Рис. 2.3. Предельный цикл периода 4.

*Вторая бифуркация* есть ничто иное как реализация неустойчивости предыдущего предельного цикла в ситуации, когда  $|dF^4/dx| > 1$  и у функции  $F^4$  появляется новая пара неподвижных точек. С дальнейшим ростом  $r$  происходят последующие бифуркации и рождаются новые предельные циклы с удваивающимися периодами: 8, 16, 32 и т.д. На рис. 2.5 представлена диаграмма бифуркаций, построенная с помощью процедуры пакета

MATLAB (см. Приложение); она показывает, что даже очень простые системы могут обладать богатыми структурами бифуркаций.

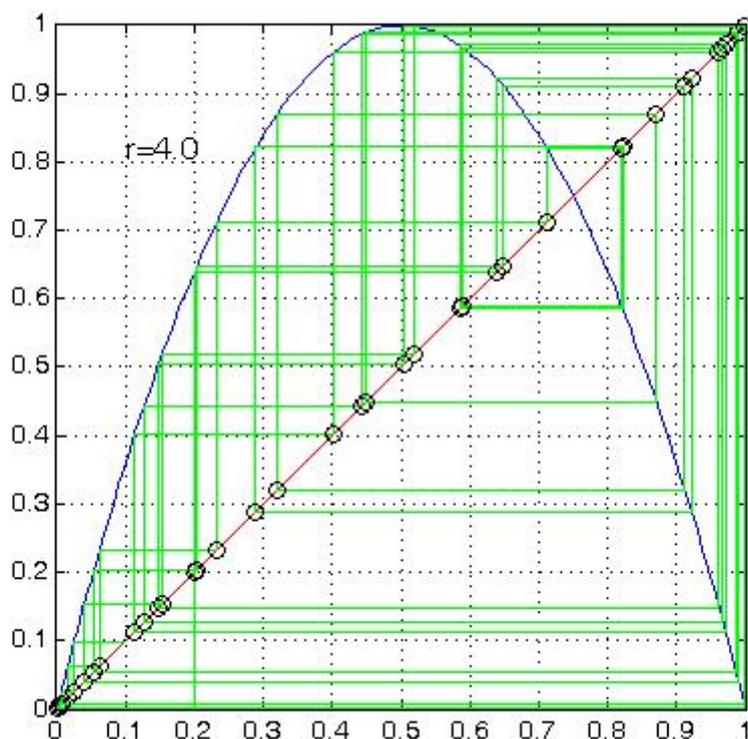


Рис. 2.4. Хаос.

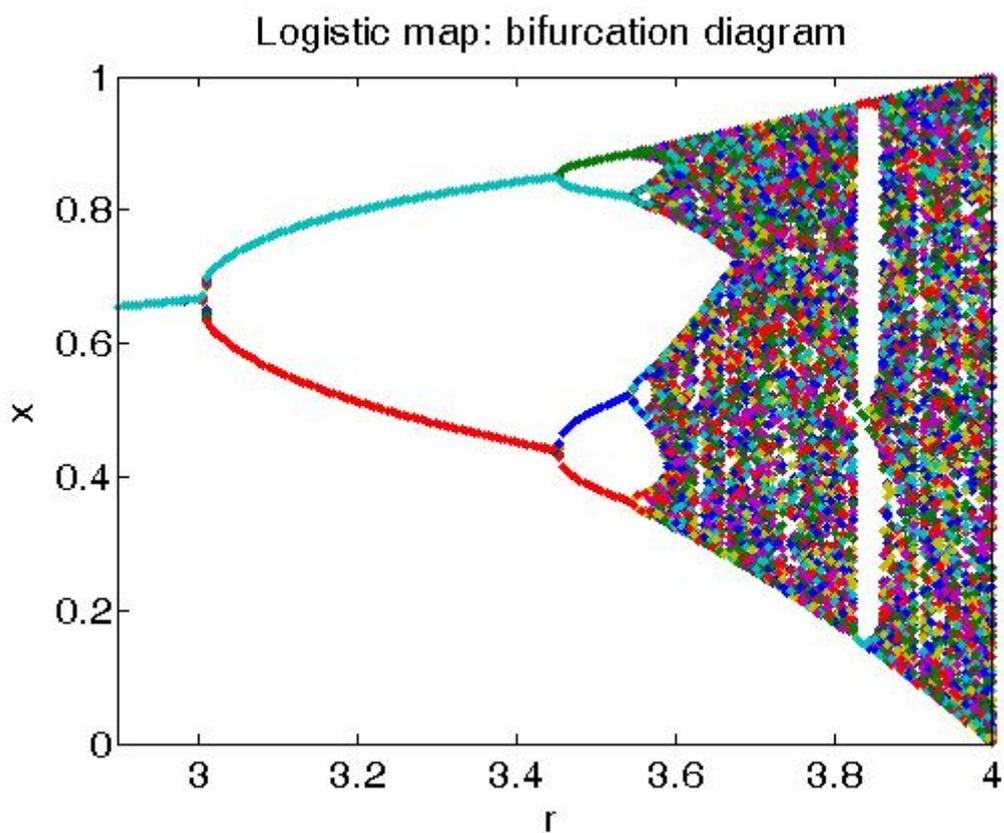


Рис. 2.5. Диаграмма бифуркаций логистического отображения

Из рисунка 2.5 видно, что при  $r \approx 3.57$  независимо от начальных данных траектории становятся очень нерегулярными и в системе возникает частичный хаос. Любопытно, что при дальнейшем возрастании  $r$  в хаотической картине появляются своеобразные *островки устойчивости* (в частности, в интервале  $3.83 < r < 3.84$ ), где образуется предельный цикл с периодом 3 и затем снова происходит удвоение периодов: 6, 12, 24 и т.д. Аналогичная картина имеет место для осцилляций всех периодов.

При  $r = 4$  отображение становится полностью хаотическим: величина  $x$  принимает случайные значения, которые полностью покрывают интервал  $[0,1]$ . Если сделать замену переменных

$$x_n = \sin^2(\pi y_n / 2),$$

то итерационный процесс принимает следующий вид:

$$y_{n+1} = \begin{cases} 2y_n, & 0 \leq y_n \leq 1/2 \\ 2(1 - y_n), & 1/2 \leq y_n \leq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Отображение (2.11) известно под названием отображение «тент». Последовательные значения  $y_n$ , формирующиеся с некоторого случайного значения, также образуют случайный процесс, что и определяет хаотическую картину поведения траектории в данном случае.

Наступление хаоса означает, что траектории оказываются чувствительными к малым возмущениям в начальных условиях и с экспоненциальной скоростью разбегаются друг от друга. Пусть заданы начальные условия  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$  и спрашивается, какое расстояние  $|x'_n|$  будет между траекториями на  $n$ -ой итерации, если предположить его экспоненциальный рост:

$$|x'_n| = \Delta x e^{n\lambda(x_0)}, \quad (2.12)$$

где  $\lambda(x_0)$  есть так называемый *показатель Ляпунова* для начального условия  $x_0$ , определяемый как

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{F^n(x_0 + \Delta x) - F^n(x_0)}{\Delta x} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{dF^n(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (2.13)$$

Для логистического отображения с  $r = 4$  предел существует и не зависит от  $x_0$  почти для всех начальных условий (за исключением точек, принадлежащих неустойчивым предельным циклам), что позволяет ввести единый показатель Ляпунова (обозначим его  $\lambda$ ). Поскольку

$$\frac{dF^n(x_0)}{dx_0} = \prod_{i=0}^{n-1} F'(x) \Big|_{x=x_i},$$

то

$$\lambda = \langle \log |F'| \rangle, \quad (2.14)$$

где символ  $\langle \rangle$  означает осреднение по всем итерациям отображения. Положительные значения  $\lambda$  означают чувствительную зависимость отображения от начальных условий и могут быть использованы как критерий наступления хаоса. Появляющиеся же временами отрицательные значения можно трактовать как индикаторы островков устойчивости (см. рис. 2.6 и Табл. 1).

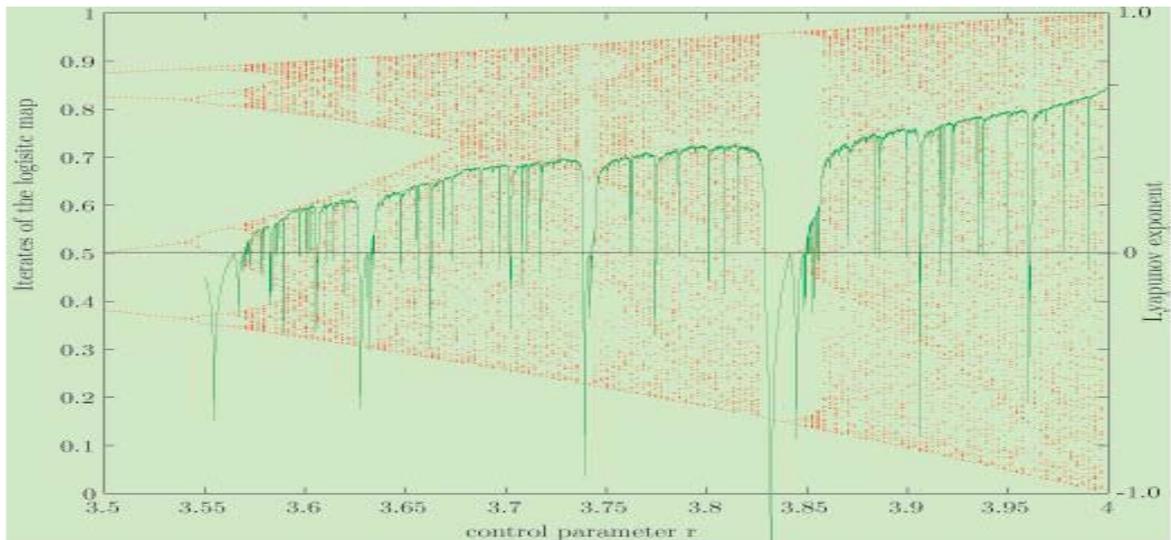


Рис. 2.6. Диаграмма бифуркаций вместе с соответствующими показателями Ляпунова (зеленый цвет) для логистического отображения.

Табл. 1. Показатели Ляпунова для различных значений параметра  $r$

$r$	$\lambda$	Процесс
1	$0 - 0.005112$	начало формирования устойчивой неподвижной точки
3	-0.003518	начало устойчивого цикла периода 2
3.44949	-0.003150	начало устойчивого цикла периода 4
3.56995	+0.001934	появление хаоса
3.82843	-0.003860	начало устойчивого цикла периода 3
3.9	+0.7095	возвращение хаоса
4	+0.6931	хаос

Опыт исследования различных динамических систем показал, что переход к хаосу осуществляется, в основном, с помощью трех «сценариев», а именно, через каскад удвоений периода (Feigenbaum, 1978), перемежаемость (Pomeau & Maneville, 1980) и квазипериодические режимы (Ruelle & Takens, 1971). Примером реализации первого сценария является появление хаоса в логистическом отображении при  $r \approx 3.57$ . Характерной особенностью многих гидродинамических процессов является перемежающаяся турбулентность: ламинарное течение в некоторых пространственных областях, чередующихся с областями турбулентного движения. Поскольку турбулентные области перемещаются, меняют форму, возникают и исчезают, то и в фиксированной точке пространства зависимость наблюдаемых величин от времени также имеет перемежающийся характер (см. рис. 1.1). Логистическое отображение демонстрирует этот тип перехода к хаосу при  $r \approx 3.83$ . Наконец, третий сценарий перехода к хаосу

связан с потерей устойчивости через т.н. бифуркацию Хопфа, в результате которой режим устойчивого равновесия переходит в предельный цикл – в фазовом пространстве появляются замкнутые траектории, соответствующие периодические решения по времени.

### 2.3. Уравнения Рэлея и Орра-Зоммерфельда

Неустойчивость гидродинамических течений может создаваться некоторыми формами распределения скорости в них. Классической задачей является, например, вопрос об устойчивости (Монин, 1986) плоскопараллельного стационарного течения несжимаемой идеальной ( $\nu = 0$ ) жидкости, направленного вдоль оси  $x$  и имеющего скорость  $\vec{u}_0 = \{U(z), 0, 0\}$ . Линеаризованные уравнения гидродинамики можно записать в этом случае в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + U \frac{\partial \vec{u}'}{\partial x} + w \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial z} &= -\nabla \pi', \\ \nabla \cdot \vec{u}' &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

где штрихами обозначены возмущения соответствующих гидродинамических величин. Используя эти уравнения, можно получить следующее уравнение для плотности кинетической энергии возмущений  $K = \rho_0 |\vec{u}'|^2 / 2$ :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial UK}{\partial x} + \rho_0 u' w' \frac{\partial U}{\partial z} + \nabla \cdot \rho_0 \pi' \vec{u}' = 0. \quad (2.16)$$

Если течение происходит в слое между твердыми горизонтальными стенками, на которых имеет место условие непротекания ( $w = 0$ ), а по горизонтали возмущения затухают на бесконечности, то интегрирование (2.16) по всей области определения решения приводит к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} \int K dV = - \int \rho_0 u' w' \frac{\partial U}{\partial z} dV, \quad (2.17)$$

так что кинетическая энергия возмущений может меняться со временем вследствие работы напряжений  $-\rho_0 u' w'$  на градиенте равновесной скорости  $\partial U / \partial z$ . Ограничиваясь случаем лишь двумерных возмущений, удовлетворяющих уравнению неразрывности

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0,$$

можно ввести функцию тока  $\psi$ , удовлетворяющую соотношениям

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

и переписать первое из уравнений (2.15) в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.18)$$

Если искать волновые решения уравнения (2.18) в виде

$$\psi = \psi_0(z)e^{i(kx - \omega t)},$$

то для комплексной амплитуды  $\psi_0(z)$  можно получить так называемое *уравнение Рэлея*

$$(U - c) \left( \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - k^2 \psi_0 \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \psi_0 = 0, \quad (2.19)$$

где  $c = \omega/k$  - фазовая скорость. В случае вязкой жидкости уравнение (2.18) принимает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta \psi - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu \Delta^2 \psi, \quad (2.20)$$

а (2.19) становится уравнением *Орра-Зоммерфельда*

$$(U - c) \left( \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - k^2 \psi_0 \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \psi_0 = -\frac{i\nu}{k} \left( \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} - 2k^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + k^4 \psi_0 \right). \quad (2.21)$$

Краевые условия для уравнения (2.19) заключаются в обращении в ноль значений  $\psi_0$  на границах потока, а для (2.21) – наряду с этим еще и обращения в ноль на тех же границах значений  $\partial \psi_0 / \partial z$ .

Уравнения Рэлея и Орра-Зоммерфельда являются однородными и потому будут иметь нетривиальные решения лишь при некоторых значениях параметра  $c$ . Эти *собственные значения* задачи в общем случае будут комплексными числами  $c = c_r + ic_i$ , зависящими от волнового числа  $k$ , скорости  $U$  и вязкости  $\nu$ , т.е. от числа Рейнольдса  $Re$ . С действительной частью  $c_r$  связана скорость распространения волны, а мнимая часть  $c_i$  характеризует изменения амплитуды волны со временем, которые описываются множителем  $e^{kc_i t}$ . При  $c_i < 0$  амплитуда будет затухать, при  $c_i = 0$  - оставаться неизменной (нейтральная волна), а при  $c_i > 0$  - расти со временем. Можно таким образом определить критическое число Рейнольдса  $Re_{cr}$  как то значение  $Re$ , при котором впервые  $c_i(k, Re) = 0$  хотя бы при одном  $k$ . Подробное изложение вопросов, связанных с исследованием вопросов гидродинамической неустойчивости, можно найти в обзоре Моница (1986).

## Приложение.

```
%cobweb.m
%% MAKES A COB WEB PLOT FOR A LOGISTIC MAP
%% http://www-rohan.sdsu.edu/~rcarrete/teaching/M-538/lectures/codes/1D_map/cobweb.m
%% STEP 1: PLOT THE MAP FUNCTION AND THE LINE y=x
```

```
fplot('4.0*y*(1-y)',[0 1]); hold on;
axis('square'); axis([0 1 0 1]);
set(gca,'XTick',(0:0.1:1),'YTick',(0:0.1:1))
```

```
grid on;
fplot('1*y',[0 1],'r');
```

```
%%%%%%%%%% STEP 2: COMPUTE TRAJECTORY
```

```
r=4.0;
x0=0.2      % Initial condition
N=40;      % Number of iterations
x(1) = x0;
for ic=1:N
    x(ic+1) = r*x(ic)*(1-x(ic));
end
```

```
%%%%%%%%%% STEP 3: PLOT COBWEB
```

```
line([x(1) x(1)],[0 x(2)],'Color','g')
plot(x(1), x(1),'ko');
for ic=1:N-1
    line([x(ic) x(ic+1)],[x(ic+1) x(ic+1)],'Color','g')
    line([x(ic+1) x(ic+1)],[x(ic+1) x(ic+2)],'Color','g')
    plot(x(ic+1), x(ic+1),'ko');
end
line([x(N) x(N+1)],[x(N+1) x(N+1)],'Color','g')
```

```
%%%%%%%%%% STEP 4: SIGN THE PLOT
```

```
ht=text(0.1,0.82,['r=4.0']); set(ht,'FontSize',12);
% end of COBWEB
```

```
% logistic_bif.m
```

```
% http://www-rohan.sdsu.edu/~rcarrete/teaching/M-538/lectures/codes/1D\_map/logistic\_bif.m
```

```
% Bifurcation diagram for logistic map
```

```
g = inline('r*x.*(1-x)','r','x');
Npts=200;
Ntrans=100;
Ntot=Ntrans+Npts;
fig1=1;
```

```
% For the whole window:
```

```
rmin = 2.9;
rmax = 4;
xmin=0;
xmax=1;
Nr = 200;
rr = linspace(rmin,rmax,Nr);
x0=0.1;
```

```
ms=5;
```

```

lw=2;
fs=15;
figure(fig1);clf
p1 = plot(rmin-1,x0,'.','EraseMode','none','MarkerSize',ms);
axis([rmin rmax xmin xmax]);
hold on
set(gca,'FontSize',[fs]);
xlabel('r'); ylabel('x');
% title(['Logistic map: bifurcation diagram']);
title(['Логистическое отображение: диаграмма бифуркаций']);

XX=[];
X=[x0];
xo=x0;
for r=rr
xo=xo+1e-10;
A=ones(1,Npts)*r;
for i=1:Ntot
xn=g(r,xo);
X=[X xn];
xo=xn;
end

XX=[XX ; X(Ntrans+1:Ntot)];
set(p1,'Xdata',A,'YData',X(Ntrans+1:Ntot))
drawnow
X=[X(Ntot:Ntot)];

end

figure(fig1)
plot(rr,XX,'.','MarkerSize',ms);
% end of logistic_bif.m

```

### Глава 3. Статистические методы описания турбулентности

Как уже отмечалось, характерной особенностью тех движений жидкости (или газа), которые называются турбулентными, является наличие беспорядочных пульсаций гидродинамических характеристик потока, что проявляется в существовании структур на всех масштабах. При многократной реализации потока в одинаковых условиях точные значения всех полей каждый раз оказываются иными. Из-за сильной неупорядоченности и резкой изменчивости во времени и в пространстве полей всех гидродинамических величин при изучении турбулентности удобно оказалось использовать какие-либо *методы осреднения*, позволяющие перейти от исходных пульсирующих гидродинамических полей к более плавным и регулярным *средним значениям* характеристик потока, которые можно исследовать с помощью обычных методов математического анализа (Монин и Яглом, 1965).

#### 3.1. Практические методы и правила осреднения

На практике при определении среднего значения чаще всего пользуются временным или пространственным осреднением по какому-либо промежутку времени или области пространства. Иногда рассматривают более общее пространственно-временное осреднение функций  $f(x_1, x_2, x_3, t) = f(\vec{x}, t)$ , задаваемое формулой

$$\overline{f(x_1, x_2, x_3, t)} = \iiint \int f(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3, t - \tau) \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau, \quad (3.1)$$

где черта сверху является символом осреднения, а  $\omega(\vec{\xi}, \tau)$  — некоторая весовая функция (как правило, неотрицательная), удовлетворяющая условию нормировки

$$\iiint \int \omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\tau = 1. \quad (3.2)$$

Если функция  $\omega$  отлична от нуля лишь внутри некоторой четырехмерной области и принимает здесь постоянное значение, то (3.1) представляет собой простое осреднение по заданной пространственно-временной области. При  $\omega(\vec{\xi}, \tau) = \omega(\vec{\xi})\delta(\tau)$ , где  $\delta$  означает  $\delta$ -функцию Дирака, а  $\omega(\vec{\xi})$  принимает постоянное значение на некотором параллелепипеде и равные нулю вне его, имеет место пространственное осреднение. Аналогичным образом, при  $\omega(\vec{\xi}, \tau) = \omega(\tau)\delta(\vec{\xi})$  формула (3.1) означает осреднение по времени. Поскольку среднее значение в общем случае зависит от вида весовой функции  $\omega$ , то эта формула приводит к множеству различных «средних значений», что приводит к вопросу, какое из них является «наилучшим».

Выбор какого-либо определенного «правила осреднения» диктуется некими общими требованиями, которые исследователь предъявляет к этому правилу. В теории турбулентности важнейшим из таких общих требований является то, что применение рассматриваемого осреднения к дифференциальным уравнениям гидродинамики позволяло бы получить достаточно простые уравнения относительно средних значений гидродинамических полей. Соответствующие условия были сформулированы Рейнольдсом (1894) и заключаются в выполнении следующих пяти соотношений:

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad (3.3)$$

$$\overline{af} = a\overline{f}, \quad (3.4)$$

$$\overline{a} = a, \quad (3.5)$$

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial f}{\partial s}}, \quad (3.6)$$

$$\overline{\overline{fg}} = \overline{fg}, \quad (3.7)$$

причем  $a = const$  и  $s$  - это любая из пространственных координат или время. Соотношения (3.3) – (3.7) называются *условиями Рейнольдса*. Из этих соотношений можно получить следующие важные следствия:

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}, \quad \overline{f'} = \overline{f - \overline{f}} = 0, \quad \overline{\overline{fg}} = \overline{fg}, \quad \overline{\overline{fg'}} = \overline{fg'} = 0. \quad (3.8)$$

Условия (3.3) – (3.6) будут выполняться при любом осреднении (3.1) с произвольной весовой функцией  $\omega$ , удовлетворяющей соотношению нормировки (3.2). Иначе обстоит дело с условием (3.7). Так, например, если пользоваться временным или пространственным осреднением, то, строго говоря, ни при каком выборе интервала осреднения это условие не будет точно выполняться. Рейнольдс, однако, предположил, что интервал осреднения можно выбрать таким, чтобы это условие приближенно выполнялось со сравнительно большой степенью точности: он должен быть велик по сравнению с характерными масштабами пульсационного поля  $f' = f - \overline{f}$ , но мал по сравнению с масштабами осредненного поля  $\overline{f}$ . В таком подходе предполагается, что турбулентное движение может быть разбито на сравнительно плавное и медленно меняющееся «среднее движение» и налагающееся на него крайне нерегулярное «пульсационное движение», причем между областями частот, характерных для того и другого движения, имеется заметный разрыв. Это означает, что преобразование Фурье (по времени или по координатам) функции  $f$  отлично от нуля лишь в некоторой области низких частот (или волновых чисел) и в некоторой далекой от нее области больших частот (или волновых чисел). Такая картина может быть получена для искусственных турбулентных потоков, создаваемых в лаборатории. В случае же естественных турбулентных движений в земной атмосфере и океане она не всегда может быть принята, поскольку атмосферная и океаническая турбулентность часто имеет широкий непрерывный спектр.

### 3.2. Вероятностное осреднение

Использование осреднения, задаваемого какой-либо формулой вида (3.1), весьма удобно с практической точки зрения, но обладает тем существенным недостатком, что каждый раз приходится специально решать вопрос о форме функции  $\omega(\xi, \tau)$ , наиболее подходящей для той или иной задачи. Поэтому оказалось целесообразным при теоретическом рассмотрении турбулентности не использовать осреднения такого типа, а следовать предложенной А.Н. Колмогоровым вероятностной трактовке полей гидродинамических величин в турбулентном потоке как случайных полей. Основой такого теоретико-вероятностного (или, как чаще говорят, статистического) подхода к теории турбулентности является рассмотрение статистического ансамбля турбулентных потоков, задаваемых некоторой совокупностью фиксированных внешних условий. Дело в том, что в отличие от ламинарных течений в турбулентных потоках влияние малых неконтролируемых возмущений приводит к тому, что, проведя два раза один и тот же

эксперимент (например, в аэродинамической трубе) в практически одинаковых условиях, могут быть получены (скажем, в точке  $\bar{x}$  в момент времени  $t$ ) два различных значения величины скорости  $\vec{u}(\bar{x}, t)$  и других характеристик потока. Но тогда можно ввести в рассмотрение «множество всех значений величины  $\vec{u}(\bar{x}, t)$ , получающихся во всевозможных экспериментах при заданных внешних условиях», и значение  $\vec{u}(\bar{x}, t)$ , полученное в каком-то конкретном эксперименте, считать одним «представителем», выбранным наудачу из этого множества.

В случае природной турбулентности (например, атмосферной) выбор такого множества представляет большие трудности, так как метеорологические условия не могут быть повторно воспроизведены по желанию экспериментатора. Однако, часто удается подобрать ряд ситуаций, в которых все условия, существенно влияющие на наблюдаемые характеристики потока (например, при измерении на мачтах - значение средней скорости и направление ветра, вертикальные градиенты скорости ветра и температуры и др.), оказываются практически одинаковыми. Тогда совокупность этих ситуаций и будет представлять собой «статистический ансамбль аналогичных наблюдений», не отличающийся от ансамбля турбулентных потоков в идентичных аэродинамических трубах.

Если теперь зафиксировать внешние условия и многократно при этих условиях повторять эксперимент (под которым можно понимать лабораторный опыт, численный эксперимент или натурные наблюдения), каждый раз регистрируя получающееся значение какой-либо характеристики потока  $u(\bar{x}, t)$ , то среднее арифметическое всех полученных значений этой величины на практике обычно оказывается довольно устойчивым (мало меняется после достаточно большого числа наблюдений, колеблясь около некоторого постоянного значения). Наличие такой устойчивости средних означает, что результаты проведенных аналогичных экспериментов образуют статистический ансамбль. Значение, около которого колеблется среднее арифметическое значений  $u(\bar{x}, t)$ , наблюдавшихся в совокупности аналогичных экспериментов, называется теоретико-вероятностным средним значением величины  $u(\bar{x}, t)$  и также обычно обозначается чертой сверху.

Особый интерес представляет характеристика  $\chi_{u(\bar{x}, t)}(u', u'')$ ,  $u'' > u'$ , которая равняется нулю, если  $u(\bar{x}, t) < u'$  или же  $u(\bar{x}, t) > u''$ , и равняется единице в противоположном случае. Значение  $\chi_{u(\bar{x}, t)}(u', u'')$ , представляющее собой относительную частоту наблюдений, для которых  $u' \leq u(\bar{x}, t) \leq u''$ , называется *вероятностью* того, что  $u(\bar{x}, t)$  примет значение в интервале между  $u'$  и  $u''$ . Обычно, величина  $\chi_{u(\bar{x}, t)}(u', u'')$  может быть представлена в виде интеграла в пределах от  $u'$  до  $u''$  от некоторой неотрицательной функции  $p(u)$ , называемой *плотностью распределения вероятности* (или просто *плотностью вероятности*) величины  $u(\bar{x}, t)$ . При этом совокупность всех  $u$ , для которых  $p(u) \neq 0$ , будет составлять «множество возможных значений  $u(\bar{x}, t)$ »; конкретное же значение  $u(\bar{x}, t)$ , наблюденное в одном из экспериментов, называется *выборочным значением* (или *реализацией*) величины  $u$ .

Факт существования плотности  $p(u)$  часто записывается в виде равенства

$$P(u < u(\bar{x}, t) < u + du) = p(u)du,$$

Где знак  $P(...)$  означает вероятность выполнения условия, указанного в скобках. Теоретико-вероятностное среднее значение  $\overline{u(\vec{x}, t)}$  величины  $u(\vec{x}, t)$  выражается через  $p(u)$  при помощи соотношения

$$\overline{u(\vec{x}, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} up(u)du . \quad (3.9)$$

Знание плотности вероятности  $p(u)$  позволяет также определить и теоретико-вероятностные средние значения произвольных функций от  $u(\vec{x}, t)$ :

$$\overline{F(u(\vec{x}, t))} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)p(u)du . \quad (3.10)$$

Таким образом, с точки зрения теории вероятностей значение любой характеристики турбулентного потока представляет собой случайную величину, определяемую некоторым ее *распределением вероятности*  $p(u', u'') = P(u' < u < u'')$ .

Аналогичный подход приложим и ко всему полю значений  $u(\vec{x}, t)$ , т. е. функции  $u(x_1, x_2, x_3, t)$  от четырех переменных. Повторяя много раз один и тот же эксперимент (сводящийся к осуществлению некоторого турбулентного движения) при одинаковых внешних условиях, каждый раз будет возникать новое поле  $u(\vec{x}, t)$ . Таким образом, и здесь можно говорить о «множестве возможных полей», а каждое отдельное поле, наблюдающееся в каком-то конкретном турбулентном потоке, рассматривать как одного «представителя», наудачу выбранного из этого множества, т.е. как одну *реализацию* случайного поля  $u(\vec{x}, t)$ . Чтобы о поле  $u(\vec{x}, t)$  можно было говорить как о *случайном поле*, необходимо, чтобы значение этого поля в любой фиксированной точке  $M = (\vec{x}, t)$  пространства — времени являлось случайной величиной. Каждой комбинации значений  $\vec{x}$  и  $t$  должна отвечать своя плотность вероятности  $p_M(u)$ , зависящая от  $M = (\vec{x}, t)$ . Если выбрать два значения  $u(M_1) = u(\vec{x}_1, t_1)$  и  $u(M_2) = u(\vec{x}_2, t_2)$ , то средние арифметические любых функций от этих двух величин также должны быть статистически устойчивыми. Это значит, что для величин  $u(M_1)$  и  $u(M_2)$  должна существовать *двумерная плотность вероятности*  $p_{M_1 M_2}(u_1, u_2)$ , определяемая соотношением

$$P(u_1 < u(M_1) < u_1 + du_1, u_2 < u(M_2) < u_2 + du_2) = p_{M_1 M_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 .$$

Аналогичным образом вводится *N-мерная плотность вероятности* значений  $N$  случайных величин  $u(M_1), u(M_2), \dots, u(M_N)$ :

$$\begin{aligned} P(u_1 < u(M_1) < u_1 + du_1, u_2 < u(M_2) < u_2 + du_2, \dots, u_N < u(M_N) < u_N + du_N) = \\ = p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) du_1 du_2 \dots du_N \end{aligned}$$

Функции  $p_{M_1 M_2 \dots M_N}$  должны быть неотрицательными и интеграл от каждой из них по всем переменным должен равняться единице. Вероятностное среднее значение  $\bar{F}$  произвольной функции  $F(u_1, u_2, \dots, u_N)$  от аргументов  $u_i = u(M_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , определяется как интеграл

$$\bar{F} = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_N F(u_1, u_2, \dots, u_N) p_{M_1 M_2 \dots M_N}(u_1, u_2, \dots, u_N).$$

При исследовании турбулентных течений с помощью статистических методов все гидродинамические поля (трех компонент скорости, давления, плотности, температуры и др.) предполагаются случайными полями, каждому из которых соответствует своя система многомерных плотностей вероятности. Поскольку различные гидродинамические поля в турбулентном потоке являются статистически связанными друг с другом, то предполагается, что для них существуют также *совместные плотности вероятности* значений одного из полей в каких-то заданных  $N_1$  точках пространства — времени, значений другого поля в заданных  $N_2$  точках и т. д. Для любой функции от гидродинамических характеристик турбулентного потока можно определить ее среднее значение как интеграл от произведения этой функции на совместную плотность вероятности всех ее аргументов, вычисленный по всей области изменения этих аргументов. При этом условия (3.3) — (3.7) есть ничто иное как известные, точно выполняющиеся, свойства теоретико-вероятностных средних значений.

### 3.3. Моменты случайных величин и полей

Итак, для полного статистического описания полей гидродинамических характеристик турбулентного потока требуется задать все многомерные распределения вероятности для значений этих характеристик на всевозможных множествах точек пространства — времени. Определение таких многомерных распределений является весьма сложной задачей и редко может быть осуществлено с достаточной точностью. К тому же сами эти распределения часто оказываются мало удобными для приложений в силу своей громоздкости. Поэтому на практике при решении конкретных задач теории турбулентности чаще всего ограничиваются рассмотрением лишь некоторых более простых статистических параметров, описывающих те или иные частные статистические свойства течения.

Наиболее важными из таких параметров распределений вероятности являются *моменты*. Рассмотрим для простоты случай одномерной плотности вероятности. Тогда  $n$ -ый момент случайной величины  $u$  определяется как

$$B_n = \overline{u^n} = \int_{-\infty}^{\infty} u^n p(u) du, \quad (3.11)$$

который при  $n=1$  представляет собой среднее значение величины  $u$ . Наряду с этими характеристиками используются также *центральные моменты*, т.е. моменты отклонений величины  $u$  от ее среднего значения:

$$b_n = \overline{u'^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \bar{u})^n p(u) du. \quad (3.12)$$

Легко убедиться, что

$$b_1 = 0, \quad b_2 = B_2 - B_1^2, \quad b_3 = B_3 - 3B_1 B_2 + 2B_1^3, \quad b_4 = B_4 - 4B_1 B_3 + 6B_1^2 B_2 - 3B_1^4, \dots \quad (3.13)$$

Если  $\bar{u} = 0$ , то центральные моменты совпадают с обычными. Момент  $b_2 = \overline{u'^2}$  есть теоретико-вероятностная дисперсия величины  $u$ . Если характеристики состояния течения имеют определенную размерность, то размерными будут и соответствующие моменты или центральные моменты. Вместе с этим для описания турбулентности часто используют безразмерные величины, такие как

$$s = \frac{b_3}{b_2^{3/2}}, \quad \delta = \frac{b_4}{b_2^2}. \quad (3.14)$$

Отношение  $s$  называется *асимметрией* случайной величины  $u$ , а разность  $(\delta - 3)$  - ее *эксцессом*.

Если ввести *характеристическую функцию* распределения вероятности как ее преобразование Фурье

$$p^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iku} p(u) du = \overline{e^{iku}}, \quad (3.15)$$

то можно найти, что

$$\left. \frac{d^n p_k^*}{dk^n} \right|_{k=0} = i^n B_n,$$

т.е. момент какого-то порядка можно выразить через производную того же порядка от характеристической функции, вычисленную при  $k = 0$ . Это также означает, что характеристическая функция может быть записана в виде следующего ряда Тейлора

$$p^*(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} B_n. \quad (3.16)$$

Различные моменты не могут принимать произвольные значения, а должны удовлетворять некоторым условиям, имеющим вид неравенств. Так, например, если показатели  $n$  четные, то как обычные, так и центральные моменты  $B_n$  и  $b_n$ , очевидно, не могут быть отрицательным. Кроме того, если рассмотреть среднее значение неотрицательной величины  $\left( \sum_{k=0}^n c_k u^k \right)^2$ , где  $c_0, c_1, \dots, c_n$  - произвольные вещественные числа, то можно установить следующее неравенство

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n c_k c_l B_{k+l} \geq 0. \quad (3.17)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$|B_3| \leq (B_2 B_4)^{1/2} \quad \text{и} \quad |s| \leq \delta^{1/2}. \quad (3.18)$$

Аналогичные неравенства могут быть выведены и для моментов высших порядков и моментов многомерных распределений. Тем не менее, даже при этих ограничениях

задание всех без исключения моментов дает очень много информации о соответствующем распределении вероятности. На практике, однако, никогда не известны все моменты. Обычно рассматривают лишь несколько моментов низших порядков, которые не определяют однозначно распределения, а характеризуют лишь некоторые его частные свойства. Тем не менее, подход к изучению случайных величин, опирающийся на использование информации о лишь нескольких их моментах, часто оказывается весьма полезным.

В теории турбулентности оперируют не только со случайными величинами, но и со случайными полями – случайными функциями  $u(M)$  от точки  $M$  четырехмерного пространства – времени. Моментами  $K$ -го порядка такого поля называются средние от произведения  $K$  значений поля:

$$B_{uu\dots u}(M_1, M_2, \dots, M_K) = \overline{\prod_{k=1}^K u(M_k)} \quad (3.19)$$

и поскольку они зависят от координат точек, то являются функциями от  $4K$  переменных. Некоторые из этих точек могут совпадать друг с другом, при этом число различающихся среди них определяет *тип* момента. В этой связи говорят об одноточечных, двухточечных, трехточечных и т.д. моментах. Средние от произведений значений нескольких разных случайных полей, статистически связанных друг с другом, называются *смешанными моментами* этих полей. Так, если речь идет о поле вектора скорости  $\vec{u}(M) = (u_1(M), u_2(M), u_3(M))$ , то в наличии будет  $3^K$  различных (обычных и смешанных) моментов порядка  $K$ , образующих вместе один трехмерный тензор  $K$ -го ранга. В частности, двухточечные моменты второго и третьего порядков поля скорости являются компонентами следующих тензоров второго и третьего рангов, соответственно:

$$\begin{aligned} B_{ij}(M_1, M_2) &= \overline{u_i(M_1)u_j(M_2)}, \\ B_{ij,k}(M_1, M_2) &= \overline{u_i(M_1)u_j(M_1)u_k(M_2)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

причем тензор  $B_{ij,k}$  симметричен по индексам  $i$  и  $j$ . Аналогичным образом можно ввести смешанные моменты других гидродинамических полей, например, двухточечные смешанные моменты поля температуры и поля скорости  $B_{Tj}(M_1, M_2)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , поля давления и поля температуры  $B_{pT}(M_1, M_2)$  и т.д. Если значения всех полей относятся к одному и тому же моменту времени, то говорят о пространственных моментах, а если к одной точке, но в разные моменты времени, то о временных моментах. Одноточечные моменты в литературе часто обозначаются просто с помощью черты сверху (например,  $\overline{u^k}$  или  $\overline{uv}$ ); для дисперсии же  $b_{uu}(M) = \overline{u'^2(M)}$  поля  $u(M)$  используется символ  $\sigma_u^2$ .

При исследовании турбулентности часто используются так называемые *корреляционные функции* – двухточечные моменты второго порядка. Корреляционная функция  $B_{uu}(M_1, M_2) = \overline{u(M_1)u(M_2)}$  поля  $u(M)$  симметрично зависит от аргументов:

$$B_{uu}(M_1, M_2) = B_{uu}(M_2, M_1) \quad (3.21)$$

и удовлетворяет неравенству

$$|B_{uu}(M_1, M_2)| \leq |B_{uu}(M_1, M_1)|^{1/2} |B_{uu}(M_2, M_2)|^{1/2}. \quad (3.22)$$

Оказывается, что любая функция  $B_{uv}(M_1, M_2)$ , удовлетворяющая условиям (3.21) и (3.22), может быть корреляционной функцией некоторого случайного поля. Смешанный двухточечный момент  $B_{uv}(M_1, M_2) = \overline{u(M_1)v(M_2)}$  называется *взаимной корреляционной функцией*  $u$  и  $v$ . Эта функция удовлетворяет аналогичному (3.22) неравенству

$$|B_{uv}(M_1, M_2)| \leq |B_{uu}(M_1, M_1)|^{1/2} |B_{vv}(M_2, M_2)|^{1/2}$$

и симметрична в том смысле, что

$$B_{uv}(M_1, M_2) = B_{vu}(M_2, M_1).$$

Центральные двухточечные моменты второго порядка

$$\begin{aligned} b_{uu}(M_1, M_2) &= \overline{u'(M_1)u'(M_2)} = B_{uu}(M_1, M_2) - \overline{u(M_1)u(M_2)}, \\ b_{vv}(M_1, M_2) &= \overline{v'(M_1)v'(M_2)} = B_{vv}(M_1, M_2) - \overline{v(M_1)v(M_2)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

представляют собой корреляционные функции пульсаций соответствующих полей. Если разделить эти функции на  $\sigma_u(M_1)\sigma_u(M_2)$  и  $\sigma_u(M_1)\sigma_v(M_2)$ , соответственно, то соответственно же получается *коэффициент корреляции* между  $u(M_1)$  и  $u(M_2)$  или между  $u(M_1)$  и  $v(M_2)$ . Естественно предполагать, что для любого гидродинамического поля  $u$  или пары таких полей  $u$  и  $v$  статистическая связь между величинами  $u(M_1)$  и  $u(M_2)$  или  $u(M_1)$  и  $v(M_2)$ , характеризуемая величиной соответствующего коэффициента корреляции, ослабевает при неограниченном удалении точек  $M_1$  и  $M_2$  друг от друга, так что корреляционные функции пульсаций гидродинамических полей стремятся к нулю.

### 3.4. Эргодичность

Приняв предположение о существовании распределений вероятности для всех гидродинамических полей, становится возможным использовать математический аппарат современной теории вероятностей. Однако, при таком подходе возникает важный дополнительный вопрос о сопоставлении выводов теории с данными непосредственных измерений. Для эмпирического определения средних значений с хорошей точностью необходимо иметь результаты большого числа измерений, производившихся в длинной серии повторяющихся аналогичных экспериментов. На практике же чаще всего этого не удается сделать и приходится определять средние значения по данным измерений, проводившихся зачастую в течение одного-единственного эксперимента. При этом обычно используется простейшее осреднение эмпирических данных по некоторому интервалу времени или пространства.

Положение дел здесь аналогично тому, что имеется в обычной статистической механике систем с конечным числом степеней свободы, где также приходится заменять теоретические «средние по ансамблю» непосредственно наблюдаемыми временными средними. При этом обычно исходят из предположения, что временные средние значения при неограниченном увеличении интервала осреднения сходятся к соответствующим теоретическим средним значениям. Справедливость этого предположения в некоторых специальных случаях строго доказывается, но зачастую оно принимается в качестве т.н.

«эргодической гипотезы». В теории турбулентности также при определенных предположениях о ее характере используется свойство сходимости временных или пространственных средних при неограниченном увеличении интервала осреднения к соответствующим вероятностным средним в качестве специальной «эргодической гипотезы».

**Стационарность.** Пусть зависимость случайного поля  $u(\vec{x}, t)$  от пространственных координат  $\vec{x}$  не существенна, так что можно рассматривать лишь функции  $u(t)$  от одной переменной  $t$ . Вопрос состоит в следующем: при каких условиях случайная величина

$$u_T(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t + \tau) d\tau$$

сходится при  $T \rightarrow \infty$  к  $\overline{u(t)}$ ? Поскольку для любой ограниченной функции  $u(t)$  и любых фиксированных значениях  $t$  и  $t_1$  (для определенности,  $t_1 > t$ ) разность

$$\begin{aligned} u_T(t) - u_T(t_1) &= \frac{1}{T} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} u(t + \tau) d\tau - \int_{-T/2}^{T/2} u(t_1 + \tau) d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[ \int_{-T/2+t}^{-T/2+t_1} u(s) ds - \int_{T/2+t}^{T/2+t_1} u(s) ds \right] \end{aligned}$$

при  $T \rightarrow \infty$  стремится к нулю, то пределы (если они существуют) при  $T \rightarrow \infty$  величин  $u_T(t_1)$  и  $u_T(t_2)$  должны совпадать друг с другом, так как среднее по времени значение функции  $u(t)$ , определяемое как  $\lim_{T \rightarrow \infty} u_T(t)$ , не может зависеть от  $t$ . Однако, вероятностное среднее значение  $\overline{u(t)}$  является, вообще говоря, функцией от  $t$ . Для равенства этих двух средних значений необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\overline{u(t)} = U = \text{const.}$$

Аналогичным образом, если использовать осреднение по времени произведения  $u(t)u(t_1) = u(t)u(t+s)$ , где  $s = t_1 - t$  предполагается фиксированным, то величина

$$\tilde{B}_{uu}(t, t_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t + \tau) u(t + s + \tau) d\tau$$

может зависеть лишь от  $s$ , но не от  $t$  и  $t_1$  по отдельности. Таким образом, временная корреляционная функция  $\tilde{B}_{uu}(t_1, t_2)$  совпадает с вероятностным средним значением  $B_{uu}(t_1, t_2) = \overline{u(t_1)u(t_2)}$  только в случае, если

$$B_{uu}(t_1, t_2) = B_{uu}(t_2 - t_1). \quad (3.24)$$

В общем случае говорят о *стационарных случайных функциях* (или стационарных случайных процессах), обладающих свойством инвариантности по отношению к сдвигу по времени, для которых все многомерные плотности вероятности удовлетворяют условию

$$p_{t_1 t_2 \dots t_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) = p_{t_1+h, t_2+h, \dots, t_N+h}(u_1, u_2, \dots, u_N) = p_{t_2-t_1, \dots, t_N-t_1}(u_1, u_2, \dots, u_N). \quad (3.25)$$

Условие стационарности означает, что физический процесс, характеризующийся функцией  $u(t)$ , является установившимся, т. е. что все условия, вызывающие этот процесс, не меняются со временем. Рассматриваемое турбулентное течение должно быть установившимся в обычном гидродинамическом смысле: все его осредненные характеристики (распределение средней скорости, средняя температура и т.п.), так же как и все внешние условия остаются неизменными во времени. Потоки, с достаточной степенью точности удовлетворяющие этому условию, сравнительно просто могут быть получены в лаборатории. В случае же геофизической турбулентности трудно гарантировать неизменность всех осредненных характеристик течения, поскольку они обычно неустойчивы и, в частности, в атмосфере имеют ярко выраженный суточный и годовой ход. Однако при рассмотрении мгновенных значений гидродинамических характеристик в течение сравнительно небольших промежутков времени (например, порядка нескольких минут или десятков минут) соответствующие случайные функции часто вполне можно считать стационарными.

Как с теоретической точки зрения, так и для приложений, важной является так называемая эргодическая теорема (или закон больших чисел), впервые доказанная Е.Е. Слуцким в 1938 г. (см. Обухов, 1954, Монин и Яглом, 1965). Она состоит в следующем: для того, чтобы для стационарного случайного процесса  $u(t)$  выполнялось равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{|u_T - U|^2} = 0, \quad (3.26)$$

необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция  $b_{uu}(\tau)$  удовлетворяла условию

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b_{uu}(\tau) d\tau = 0. \quad (3.27)$$

Так как корреляционную функцию пульсаций гидродинамического поля  $u(t)$  турбулентного потока всегда можно считать стремящейся к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ , то в теории турбулентности часто исходят из того, что для установившихся течений вероятностные средние значения могут быть определены с помощью осреднения по достаточно большому интервалу времени.

**Однородность.** Турбулентность является однородной, если все характеризующие ее средние величины инвариантны по отношению к пространственному сдвигу (параллельному переносу). Так же, как и в предыдущем случае, пространственные средние значения от случайной функции  $u(\vec{x})$  определяются формулой

$$u_{L_1, L_2, L_3}(\vec{x}) = \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \int_{-L_1/2}^{L_1/2} d\xi_1 \int_{-L_2/2}^{L_2/2} d\xi_2 \int_{-L_3/2}^{L_3/2} d\xi_3 u(\vec{x} + \vec{\xi}) \quad (3.26)$$

и требуется определить, при каких условиях величина  $u_{L_1, L_2, L_3}(\vec{x})$  при  $L_1 \rightarrow \infty, L_2 \rightarrow \infty, L_3 \rightarrow \infty$  (или же при выполнении хотя бы одного из этих предельных переходов) стремится к вероятностному среднему  $\overline{u(\vec{x})}$ . Для этого должны выполняться аналогичные выписанным выше условия

$$\begin{aligned}
\overline{u(\vec{x})} &= U = \text{const}, \\
B_{uu}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= B_{uu}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1), \\
p_{x_1, x_2, \dots, x_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) &= p_{x_1+y, x_2+y, \dots, x_N+y}(u_1, u_2, \dots, u_N) = p_{x_2-x_1, \dots, x_N-x_1}(u_1, u_2, \dots, u_N).
\end{aligned}
\tag{3.27}$$

В приложении к полям гидродинамических характеристик турбулентного потока предположение об однородности всегда является математической идеализацией; точно оно никогда не выполняется. Условия (3.27) могут выполняться с удовлетворительной точностью лишь в пределах некоторых ограниченных областей пространства, малых по сравнению с масштабами макроскопических неоднородностей и достаточно удаленных от всех ограничивающих поток твердых стенок или свободных поверхностей. При рассмотрении такой однородной в некоторой области турбулентности целесообразно считать ее частью однородного турбулентного потока, заполняющего все пространство, что связано со значительной математической простотой идеализированной схемы однородного случайного поля, существенно упрощающей теоретический анализ.

Кроме рассмотренных случаев, часто используются предположения об **изотропности** (турбулентное течение является изотропным, если все средние величины инвариантны по отношению к любому повороту системы координат) и **осесимметричности** (турбулентность является осесимметричной, если все средние величины инвариантны по отношению к вращению вокруг одной лишь оси, например, вертикальной оси  $z$  в стратифицированной по плотности среде). Перечисленные приближения к реальности также часто применяются в теоретических построениях, хотя в геофизических приложениях они редко выполняются (например, стратификация и сила Кориолиса нарушают симметрию по отношению к повороту).

### 3.5. Центральная предельная теорема

Многие величины, характеризующие турбулентность, можно рассматривать как сумму случайных возмущений. Так например, суммарное вертикальное смещение  $z$  частицы в турбулентном потоке воздуха складывается из  $N$  ее случайных перемещений (блужданий)  $z_n$ . Пусть все эти случайные изменения в положении частицы подчиняются одному и тому же распределению вероятности и имеют нулевое среднее значение. Рассмотрим сумму

$$z = \sum_{n=1}^N z_n,$$

дисперсия которой (в случае, когда все индивидуальные смещения частицы независимы и не коррелированы) может быть выражена следующим образом:

$$\sigma_z^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{z_n z_m} = N\sigma^2, \tag{3.28}$$

где  $\sigma^2$  - конечная, одинаковая для каждого из  $z_n$ , дисперсия. Поскольку значение  $\sigma_z^2$  увеличивается с ростом  $N$ , то удобно рассмотреть величину  $u = z / N^{1/2}$ , дисперсия которой уже не зависит от размера ансамбля и равна  $\sigma^2$ . Характеристическая функция (неизвестного пока) распределения вероятности для случайной функции  $u$  имеет в данном случае следующий вид

$$p_u^*(k) = \overline{e^{iku}} = \overline{\exp\left(\frac{ik}{N^{1/2}} \sum_{n=1}^N z_n\right)} = [p^*(k/N^{1/2})]^N. \quad (3.29)$$

Используя разложение в ряд Тейлора по моментам – см. формулу (3.16), можно записать

$$p^*(k/N^{1/2}) = 1 - \frac{k^2 \sigma^2}{2N} + O(k^3/N^{3/2}), \quad (3.30)$$

так что при больших  $N$  характеристическая функция принимает следующий вид:

$$p_u^*(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k^2 \sigma^2}{2N}\right)^N = e^{-k^2 \sigma^2 / 2}, \quad (3.31)$$

а соответствующее распределение вероятности есть ничто иное, как нормальное (или гауссово) распределение:

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-u^2/2\sigma^2}. \quad (3.32)$$

Данный вывод можно сформулировать в виде центральной предельной теоремы (Вентцель, 1996): если  $N$  независимых случайных величин одинаково распределены и имеют конечную отличную от нуля дисперсию, то их среднее при больших  $N$  приближенно распределено по нормальному закону. Важно подчеркнуть, что этот результат не зависит от вида (иногда даже неизвестного) распределения самих по себе случайных величин и потому часто используется во многих приложениях.

## Глава 4. Уравнения Рейнольдса и проблема турбулентного замыкания

Во многих технических приложениях часто требуется лишь знание о важнейших интегральных параметрах турбулентных течений, таких, например, как профиль скорости, расход жидкости и закон сопротивления. В то же время, богатый экспериментальный материал, накопленный при лабораторном изучении течений в круглых трубах и в пограничном слое на плоской пластинке, позволяет не только получить эту информацию, но и является эталоном для проверки различных теорий и гипотез о природе турбулентности. Уравнения Навье-Стокса являются подходящим математическим аппаратом для моделирования турбулентных течений (см. параграф 4.1). Проблема, однако, состоит в том, что невозможно предсказать в деталях движение каждого вихря, но можно попытаться описать эволюцию осредненного течения и некоторых других статистических характеристик. Впервые такого рода общие соображения, относящиеся к произвольным турбулентным течениям и лежащие в основе всей теории турбулентности, были высказаны Рейнольдсом (1894). Вместе с тем, обычное («житейское») определение турбулентных течений как течений, сопровождающихся беспорядочными пульсациями всех гидродинамических величин, недостаточно для построения математической теории турбулентности. С позиций такой теории, турбулентными являются лишь такие течения, для которых существует статистический ансамбль аналогичных течений с некоторым определенным распределением вероятности для значений всевозможных гидродинамических полей. На практике обычно используются не средние по ансамблю, а временные или пространственные средние, так что следует требовать еще, чтобы случайные поля гидродинамических величин удовлетворяли условиям эргодической теоремы.

### 4.1. Уравнения Рейнольдса

Самыми простыми статистическими характеристиками случайных гидродинамических полей являются их средние значения. Разности  $u' = u - \bar{u}$  между индивидуальными значениями поля  $u$  и его средним значением  $\bar{u}$  представляют собой пульсации этого поля. Возможность разложения гидродинамических полей на их средние значения и пульсации является основным постулатом теории Рейнольдса. Средние значения гидродинамических полей обычно оказываются весьма гладкими и медленно меняющимися. Пульсации же, наоборот, характеризуются большой изменчивостью во времени и в пространстве. Допустимо ли, однако, предполагать, что турбулентные неоднородности могут иметь сколь угодно малые масштабы (вплоть до масштабов, сравнимых со средней длиной свободного пробега молекул) и сколь угодно малые периоды (вплоть до периодов, сравнимых со средним временем между последовательными столкновениями молекул)? Ответ на этот вопрос отрицательный, поскольку при таком предположении использование подходов механики сплошных сред, а значит и дифференциальных уравнений гидродинамики, было бы необоснованным.

Однако опыт показывает, что турбулентные неоднородности никогда не имеют столь малых пространственно-временных размеров. Объясняется это тем, что неоднородностям столь малых размеров должны соответствовать очень большие градиенты скорости. В результате для движений очень малых масштабов затраты энергии на преодоление сил вязкого трения становятся столь большими, что существование таких движений практически невозможно. В результате минимальные масштабы и периоды турбулентных пульсаций оказываются во всех случаях на несколько порядков превосходящими масштабы и периоды молекулярных движений. Так например, размеры наименьших неоднородностей, наблюдающихся в воздушных и водных турбулентных потоках, имеют порядок нескольких миллиметров или, в крайнем случае, десятых долей (Монин и Яглом,

1967), в то время как в нормальных условиях длина свободного пробега молекул воздуха имеет порядок  $10^{-4}$  мм, а молекул воды — еще много меньший порядок. Более того, скорости гидродинамических потоков по порядку величины не превосходят средней скорости теплового движения молекул (близкой к 500 м/сек) и потому характерные периоды турбулентных пульсаций на несколько порядков превосходят среднее время между молекулярными столкновениями. Это означает, что на пространственно-временных масштабах, сравнимых с размерами минимальных неоднородностей и минимальными периодами пульсаций, турбулентные течения могут быть описаны с помощью обычных дифференциальных уравнений гидромеханики. Однако непосредственное использование этих уравнений затруднительно из-за того, что гидродинамические поля в турбулентном потоке всегда нестационарны и очень сильно зависят от мельчайших деталей начальных условий, которые никогда не бывают известны с достаточной полнотой. Но даже если начальное состояние известно точно, решение соответствующей задачи с начальными условиями из-за ее неустойчивости относительно малых возмущений было бы практически бесполезным.

Вместе с тем, из-за того, что индивидуальные реализации гидродинамических полей турбулентного потока удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям, статистические характеристики этих полей оказываются связанными рядом важных соотношений. Простейшие связи такого рода были установлены Рейнольдсом с помощью непосредственного осреднения уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости. Будем исходить из уравнений баланса импульса, записанных в следующем виде

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rho u_i u_\alpha = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho \nu \Delta u_i, \quad (4.1)$$

где  $i=1,2,3$ , а по повторяющемуся индексу  $\alpha$  предполагается суммирование от 1 до 3. Применяя ко всем слагаемым этих уравнений операцию осреднения и используя свойство ее коммутативности с дифференцированием по координатам и по времени, а также равенство

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}, \quad (4.2)$$

можно получить соотношения

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_\alpha + \rho \overline{u'_i u'_\alpha}) = \rho \bar{F}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho \nu \Delta \bar{u}_i, \quad (4.3)$$

обычно называемые уравнениями Рейнольдса. Эти уравнения содержат только плавно меняющиеся осредненные величины и потому при их использовании не возникает трудностей, связанных со сложностью и нерегулярностью гидродинамических полей турбулентных потоков. Но при этом возникает другая трудность, связанная с наличием в уравнениях Рейнольдса новых неизвестных величин  $\tau_{ij}^* = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ , описывающих эффект пульсационных компонент скорости. Появление этих новых неизвестных, очевидно, является непосредственным следствием квадратичной нелинейности уравнений гидродинамики. При осреднении же линейных уравнений никаких новых членов не возникает, так что, например, осредненное уравнение неразрывности записывается в прежней форме:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.4)$$

Разумеется, что аналогичный вид имеет и уравнение неразрывности для пульсаций:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0.$$

Рассмотрим теперь среднее значение плотности потока импульса

$$\overline{\rho(u_i u_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij})} = \rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} - (\bar{\sigma}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}),$$

где  $\sigma_{ij} = \rho \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  — вязкий тензор напряжений в несжимаемой жидкости, а  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Это выражение показывает, что по отношению к осредненному движению роль вязкого тензора напряжений играет тензор  $\tau_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j} = \bar{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}^*$ . Таким образом, в турбулентном течении происходит как обмен импульсом между жидкими частицами благодаря силам молекулярной вязкости, описываемого тензором вязких напряжений, так и передача импульса от одних объемов жидкости к другим, вызываемая перемешиванием, создаваемым пульсациями скорости. Иными словами, влияние турбулентного перемешивания на осредненное движение оказывается аналогичным влиянию вязкости и чтобы подчеркнуть это, уравнения Рейнольдса иногда записываются также в виде

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = \bar{F}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \overline{u'_i u'_\alpha} \right). \quad (4.5)$$

Величины  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$  в уравнениях для осредненного движения имеют смысл компонент тензора дополнительных напряжений, возникающих из-за турбулентных пульсаций подобно тому, как в обычной гидродинамике микроскопические молекулярные движения приводят к появлению вязких напряжений. Эти дополнительные напряжения называются в теории турбулентности *напряжениями Рейнольдса*.

Применяя процедуру осреднения к уравнениям гидротермодинамики атмосферы и океана, записанных в форме приближения Буссинеска (1.11), можно получить следующий их аналог для осредненного течения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\vec{u}}}{\partial t} + (\bar{\vec{u}} \cdot \nabla) \bar{\vec{u}} &= -\nabla \bar{\pi} + \bar{b} \bar{\vec{n}} - \bar{f} \bar{\vec{n}} \times \bar{\vec{u}} + \nu \nabla^2 \bar{\vec{u}} - \overline{(\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}'}, \\ \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + (\bar{\vec{u}} \cdot \nabla) \bar{b} &= \nabla \cdot (\chi \nabla \bar{b} - \overline{\vec{u}' b'}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

При этом вектор  $\bar{b} \bar{\vec{u}}$  описывает адвективный перенос плавучести осредненным движением,  $\chi \nabla \bar{b}$  — перенос за счет молекулярной диффузии, а величина

$$q_i = -\overline{\rho u'_i b'} \quad (4.7)$$

представляет собой плотность *турбулентного потока плавучести* по направлению отрицательной оси  $x_i$ .

## 4.2 Проблема турбулентного замыкания

Система уравнений (4.6) – (4.7) не замкнута, поскольку содержит вновь возникшие «вихревые» слагаемые (напряжения Рейнольдса и турбулентный поток плавучести), которые необходимо каким-то образом определить. Естественно попытаться дополнить уравнения Рейнольдса новыми уравнениями, описывающими изменения во времени напряжений  $\tau_{ij}$  и потока плавучести  $\vec{q}$ . Для вывода таких уравнений можно воспользоваться общим методом составления уравнений для моментов, предложенным Келлером и Фридманом (1924). Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_N$  - какие-то  $N$  различных или совпадающих друг с другом гидродинамических полей турбулентного течения, а  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$  - какие-то  $N$  различных или совпадающих точек в заполненной жидкостью области пространства. Производная по времени от момента  $N$ -го порядка

$$B_{u_1 u_2 \dots u_N}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) = \overline{\prod_{n=1}^N u_n(\vec{x}_n, t)}$$

в силу перестановочности операций осреднения и дифференцирования выражается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{u_1 u_2 \dots u_N} = \sum_{n=1}^N \overline{\frac{\partial u_n(\vec{x}_n, t)}{\partial t} \prod_{m=1, m \neq n}^N u_m(\vec{x}_m, t)}.$$

Если теперь исключить все производные по времени в правой части этого равенства с помощью соответствующих гидродинамических уравнений, то можно получить уравнение баланса для момента  $B_{u_1 u_2 \dots u_N}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t)$ , выражающее его производную по времени в виде комбинации моментов самих гидродинамических полей и их пространственных производных.

Если воспользоваться уравнениями Рейнольдса (4.3) для несжимаемой жидкости (плотность  $\rho = const$ ) и учесть, что  $\frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{u}_i \bar{u}_j = \rho \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$ , то уравнение для тензора  $\rho \bar{u}_i \bar{u}_j$  будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_\alpha + \overline{\rho u'_i u'_\alpha \bar{u}_j} + \overline{\rho u'_j u'_\alpha \bar{u}_i} + (\bar{p} \bar{u}_i \delta_{j\alpha} + \bar{p} \bar{u}_j \delta_{i\alpha}) - (\bar{u}_i \bar{\sigma}_{j\alpha} + \bar{u}_j \bar{\sigma}_{i\alpha}) \right] = \\ & = (\rho \bar{u}_i \bar{F}_j + \rho \bar{u}_j \bar{F}_i) + \bar{p} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \left( \bar{\sigma}_{i\alpha} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \bar{\sigma}_{j\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right) + \left( \overline{\rho u'_i u'_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho u'_j u'_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В частности, для плотности кинетической энергии осредненного движения  $E_m = \frac{1}{2} \rho \bar{u}_\beta \bar{u}_\beta$  получается уравнение

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( E_m \bar{u}_\alpha + \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta \bar{u}_\beta} + \overline{p u'_\alpha} - \bar{u}_\beta \overline{\sigma'_{\alpha\beta}} \right) = \overline{\rho u'_\alpha \bar{F}_\alpha} - \rho \varepsilon_m + \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (4.9)$$

где  $\rho \varepsilon_m = \frac{1}{2} \rho \nu \sum_{\alpha, \beta} \left( \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2$  есть удельная (на единицу времени и единицу объема)

диссипация энергии осредненного движения под действием сил молекулярной вязкости. Выражение в скобках в левой части уравнения (4.9) представляет собой плотность потока энергии, обусловленного как непосредственным переносом энергии при движении частиц жидкости, так и работой сил давления, молекулярных сил внутреннего трения и «турбулентной» вязкости. Правая же часть этого уравнения показывает, что кинетическая энергия осредненного движения меняется также вследствие работы внешних сил, диссипации, приводящей к переходу части кинетической энергии в теплоту и за счет взаимного превращения энергии осредненного и пульсационного движений (см. ниже).

Ясно, что уравнение для «мгновенного» тензора  $\rho u_i u_j$  будут иметь аналогичный (4.8) вид, если все «пульсационные компоненты» в этом уравнении положить равными нулю. Осредняя уравнение для тензора  $\rho u_i u_j$  и затем вычитая из полученного выражения почленно уравнение (4.8), можно получить следующее уравнение для тензора напряжений Рейнольдса

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho u'_i u'_j} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \overline{\rho u'_i u'_j \bar{u}_\alpha} + \overline{\rho u'_i u'_j u'_\alpha} + (\overline{p' u'_i \delta_{j\alpha}} + \overline{p' u'_j \delta_{i\alpha}}) - (\overline{u'_i \sigma'_{j\alpha}} + \overline{u'_j \sigma'_{i\alpha}}) \right] = \\ & = \overline{\rho u'_i \bar{F}'_j} + \overline{\rho u'_j \bar{F}'_i} + p' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \left( \overline{\sigma'_{i\alpha} \frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha}} + \overline{\sigma'_{j\alpha} \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}} \right) - \left( \overline{\rho u'_i u'_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho u'_j u'_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

В этом уравнении наряду со средней скоростью  $\bar{u}_i$  и напряжений Рейнольдса  $\overline{\rho u'_i u'_j}$  присутствуют новые неизвестные: третьи центральные моменты  $\overline{\rho u'_i u'_j u'_\alpha}$ , взаимные вторые моменты полей давления и скорости вида  $\overline{p' u'_i}$  и  $\overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$ , а также моменты  $\overline{u'_i \sigma'_{j\alpha}}$  и

$\overline{\sigma'_{j\alpha} \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}}$ , непосредственно не выражающиеся через напряжения Рейнольдса. Если теперь

попытаться дополнить полученную систему уравнений для средних величин и турбулентных напряжений уравнениями для этих новых неизвестных, например, для третьих моментов  $\overline{\rho u'_i u'_j u'_k}$ , то в эти уравнения снова войдут дополнительные неизвестные,

в частности, четвертые моменты  $\overline{\rho u'_i u'_j u'_k u'_l}$  и третьи моменты вида  $\overline{p' u'_i u'_k}$  или  $\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_j}{\partial x_n} u'_k}$ .

Таким образом, возникает бесконечная цепочка уравнений для высших моментов и ни на каком этапе ее составления не удастся получить замкнутой системы.

После суммирования уравнений (4.10) по  $i = j$  можно получить следующее уравнение для средней плотности кинетической энергии пульсационного движения  $E_t = \frac{1}{2} \overline{\rho u'_\alpha u'_\alpha}$ :

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( E_t \bar{u}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\rho u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \overline{p' u'_\alpha} - \overline{u'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}} \right) = \overline{\rho u'_\alpha F'_\alpha} - \rho \varepsilon_t - \overline{\rho u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (4.11)$$

где  $\rho \varepsilon_t = \overline{\sigma'_{\alpha\beta} \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}} = \frac{1}{2} \rho \nu \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)^2$  представляет собой среднюю удельную

диссипацию энергии пульсационного движения под действием вязкости. Слагаемые в скобках в левой части уравнения (4.11) описывают плотность потока турбулентной энергии, обусловленного, соответственно, переносом турбулентной энергии осредненным течением, «турбулентной вязкостью», пульсациями давления и силами внутреннего трения. Слагаемое

$$G = -\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha}, \quad (4.12)$$

входящее в правые части уравнений (4.9) и (4.11) с разными знаками, описывает взаимные превращения энергии осредненного и пульсационного движений. Наряду с общим уравнением баланса турбулентной энергии (4.11) часто используется также уравнение для кинетической энергии турбулентности  $E = \frac{E_t}{\rho} = \frac{1}{2} \overline{u'_\beta u'_\beta}$ :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial E}{\partial x_\alpha} = -\overline{u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} - \varepsilon_t + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ -\frac{1}{2} \overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_\alpha} + \nu \overline{u'_\beta} \left( \frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \right] + \overline{u'_\alpha F'_\alpha}. \quad (4.13)$$

Подход к замыканию, связанный с использованием уравнения баланса турбулентной энергии в дополнение к уравнениям Рейнольдса, был предложен Колмогоровым (1942).

В случае стратифицированной жидкости уравнение (4.10) следующим образом обобщается за счет включения эффектов сил плавучести (в приближении Буссинеска):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{u'_i u'_j} = & -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{u'_i u'_j u'_\alpha} - \left( u'_i \frac{\partial \pi'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} \right) + \\ & + \left( \overline{u'_i b' \delta_{3j}} + \overline{u'_j b' \delta_{3i}} \right) - \left( \overline{u'_i u'_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_\alpha} + \overline{u'_j u'_\alpha} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} \right) - \varepsilon_{u_i u_j}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где здесь и далее через  $\varepsilon$  с соответствующими индексами обозначены слагаемые, обусловленные молекулярными эффектами. Уравнение для кинетической энергии турбулентности принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial E}{\partial x_\alpha} = -\overline{u'_\alpha u'_\beta} \frac{\partial \bar{u}_\beta}{\partial x_\alpha} + \overline{u'_\alpha b' \delta_{3\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{2} \overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} + \overline{\pi' u'_\alpha} \right) - \varepsilon, \quad (4.15)$$

причем считается, что  $\varepsilon_{u_i u_j} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$ . Дополнительно необходимо привлечь уравнения для составляющих турбулентного потока плавучести

$$\frac{\partial \overline{u'_i b'}}{\partial t} + \overline{u}_\alpha \frac{\partial \overline{u'_i b'}}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{u'_i b' u'_\alpha} \delta_{i\alpha} - \frac{\partial \overline{\pi'}}{\partial x_i} b' + \overline{b'^2} \delta_{3i} - \left( \overline{u'_i u'_\alpha} \frac{\partial \overline{b}}{\partial x_\alpha} + \overline{b' u'_\alpha} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_\alpha} \right) - \varepsilon_{u,b}. \quad (4.16)$$

В формуле (4.16) фигурирует дисперсия плавучести  $\overline{b'^2}$ , для которой также нетрудно получить соответствующее уравнение

$$\frac{\partial \overline{b'^2}}{\partial t} + \overline{u}_\alpha \frac{\partial \overline{b'^2}}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{b'^2 u'_\alpha} - 2 \overline{b' u'_\alpha} \frac{\partial \overline{b}}{\partial x_\alpha} - \varepsilon_{bb}. \quad (4.17)$$

Разумеется, во вновь появившихся уравнениях (4.16) и (4.17) содержатся (в силу квадратичной нелинейности исходных уравнений) моменты третьего порядка, для которых также можно выписать соответствующие уравнения и т.д.

### 4.3. Иерархия методов замыкания

Будем говорить, что используется замыкание  $n$ -го порядка, если бесконечная цепочка уравнений Фридмана-Келлера оборвана на уравнениях для  $n$ -ых моментов, а моменты  $(n+1)$ -го порядка выражены тем или иным способом через моменты предыдущих порядков. Наиболее простым является замыкание *первого порядка* (в рамках так называемой  $K$ -теории), базирующееся на гипотезе Буссинеска (1897), согласно которой

$$\overline{\varphi' u'_i} = -K_\varphi \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i}, \quad (4.18)$$

где  $\varphi$  - любая скалярная величина или компонента скорости, а  $K_\varphi$  - новая величина размерности  $\text{м}^2/\text{сек}$ , называемая *коэффициентом турбулентной диффузии* (для скаляра) или *турбулентной вязкости* (для скорости). В отличие от молекулярных коэффициентов диффузии  $\chi$  и вязкости  $\nu$  коэффициенты  $K_\varphi$  характеризуют не физические свойства жидкости, а статистические свойства пульсационного движения и потому не являются постоянными величинами, а могут меняться в пространстве и во времени и даже принимать отрицательные значения. Последнее обстоятельство резко усложняет математическое моделирование турбулентных процессов в связи с возникающей при этом необходимостью решать некорректную задачу и потому, как правило, считают, что коэффициенты  $K_\varphi$  являются неотрицательными величинами. Важно также и то, что значения этих коэффициентов во многих случаях значительно (на несколько порядков) превосходят их молекулярные аналоги.

Известно, что коэффициент молекулярной вязкости  $\nu$  связан со средней скоростью молекул  $u_m$  и средней длиной их свободного пробега  $l_m$  соотношением  $\nu \sim u_m l_m$ . Эта же идея была использована в так называемых полуэмпирических теориях турбулентности (Монин и Яглом, 1965). Аналогичной  $u_m$  характеристикой можно считать среднее квадратичное значений пульсаций скорости  $\sqrt{E}$ , а вместо  $l_m$  целесообразно использовать пространственный масштаб турбулентности  $l$  - величину, описывающую среднее расстояние, на которое способны перемещаться турбулентные образования, сохраняя свою индивидуальность. При этом турбулентность может характеризоваться разными масштабами в разных направлениях. Поэтому, вообще говоря, в каждой точке потока следует задать симметричный тензор масштабов  $l_{ij}$ . Используя этот тензор и учитывая симметрию тензора  $\overline{u'_i u'_j}$ , можно положить (Монин, 1950)

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} E \delta_{ij} - \frac{1}{2} \sqrt{E} (l_{ia} D_{aj} + l_{ja} D_{ai}), \quad (4.19)$$

где  $D_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$  - (симметричный) тензор деформации. В изотропном случае ( $l_{ij} = l \delta_{ij}$ ) формула (4.19) переходит в

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} E \delta_{ij} - l \sqrt{E} D_{ij} \quad (4.20)$$

со скалярным (а не тензорным) коэффициентом турбулентной вязкости  $K = l \sqrt{E}$ .

Формулы, аналогичные (4.19) и (4.20), могут быть выписаны и в приложении к турбулентному переносу плавучести или примесей. В общем случае анизотропной турбулентности

$$\overline{b' u'_i} = -K_{bij} \frac{\partial \bar{b}}{\partial x_j}, \quad (4.21)$$

где компоненты тензора  $K_{bij}$  имеют смысл коэффициентов турбулентной диффузии. Часто предполагают, что  $K_{bij} = \alpha_b \sqrt{E} l_{ij}$ , где  $\alpha_b$  - безразмерный параметр. Если можно пренебречь анизотропностью тензора масштабов, то (4.21) примет вид

$$\overline{b' u'_i} = -\alpha_b K \frac{\partial \bar{b}}{\partial x_i}. \quad (4.22)$$

Чисто формально соотношение (4.22) применяют и к уравнению для кинетической энергии турбулентности (4.15), полагая

$$\frac{1}{2} \overline{u'_\beta u'_\beta u'_i} + \overline{\pi' u'_i} = -\alpha_E l \sqrt{E} \frac{\partial E}{\partial x_i} = -\alpha_E K \frac{\partial E}{\partial x_i}, \quad (4.23)$$

где  $\alpha_E$  - другой безразмерный коэффициент, представляющий еще одну полуэмпирическую гипотезу.

*Замыкание «1.5-го» порядка* (поскольку частично используется информация о вторых моментах – кинетической энергии турбулентности) будет окончательно сформулировано, если будет установлена связь между диссипацией турбулентной энергии  $\varepsilon$  и величинами  $l$  и  $E$  (или  $l$  и  $K$ ). Если такая связь имеет место, то ее вид однозначно можно установить с помощью теории размерностей (Колмогоров, 1942):

$$\varepsilon = c_1 \frac{E^{3/2}}{l} = c_1 \frac{K^3}{l^4}, \quad (4.24)$$

где  $c_1$  - еще один неотрицательный безразмерный параметр.

При использовании замыкания 2-го порядка возникает необходимость параметризации слагаемых, связывающих пульсации давления и других гидродинамических характеристик. Подробный анализ этой проблемы дан в монографии Курбацкого (1988). В частности, показано, что формула Ротты (Rotta, 1951), вначале предложенная для корреляции градиент давления – скорость

$$-\left( \overline{u'_i \frac{\partial \pi'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \pi'}{\partial x_i}} \right) = -c_4 \frac{\varepsilon}{E} \left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} E \delta_{ij} \right), \quad (4.25)$$

может быть в первом приближении использована для корреляции градиент давления – плавучесть

$$-\overline{b' \frac{\partial \pi'}{\partial x_i}} = -c_6 \frac{\varepsilon}{E} \overline{b' u'_i} + c_7 \left( \overline{b'^2} \delta_{3i} + \overline{b' u'_\alpha} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_\alpha} \right). \quad (4.26)$$

Здесь и далее для новых безразмерных констант  $\{c\}$  использована система нумерации, примененная в работе (Andre, 1976). Слагаемое  $\varepsilon_{bb}$  в уравнении для дисперсии плавучести (4.17) параметризуется также на основе гипотез Колмогорова

$$\varepsilon_{bb} = c_2 \frac{\varepsilon}{E} \overline{b'^2}.$$

В моделях второго порядка замыкания третьи моменты параметризуются тем или иным способом (зачастую ими пренебрегается или же используется  $K$ -теория). Наиболее последовательно это направление было реализовано в Принстонском университете США (Mellor and Yamada, 1974, 1982). Вместе с тем, замыкание типа Буссинеска (4.18), связывающее третьи моменты с градиентами вторых, подвергалось критике не только с позиций математического моделирования (Zeman and Lumley, 1976), но и с точки зрения анализа данных наблюдений (Andre, 1976). В частности, Андре на основе экспериментальных данных (Willis and Deardorff, 1974) рассчитал вертикальный поток кинетической энергии турбулентности, используя гипотезу Буссинеска (4.18), и показал, что в нижней части конвективного слоя этот поток имеет противоположный тому, что наблюдалось, знак. В верхней части конвективного слоя знаки совпадали, но величина потока была сильно занижена по сравнению с данными наблюдений.

Широкое распространение получили модели *третьего порядка замыкания*, в которых моменты четвертого порядка связывались со вторыми моментами с помощью гипотезы квазинормальной аппроксимации Миллионщикова (1941):

$$\overline{\alpha' \beta' \gamma' \delta'} \approx \overline{\alpha' \beta'} \cdot \overline{\gamma' \delta'} + \overline{\alpha' \gamma'} \cdot \overline{\beta' \delta'} + \overline{\alpha' \delta'} \cdot \overline{\beta' \gamma'}. \quad (4.27)$$

Это соотношение точно выполняется в случае нормального распределения вероятностей. Однако, в отсутствие диссипативных механизмов в уравнениях для третьих моментов, использование формулы (4.27) приводит к нефизическому развитию процесса, характеризующемуся появлением отрицательных энергий (Ogura, 1963), поскольку слишком большие третьи моменты могут переносить энергию со скоростью большей, чем она генерируется. В работе (Andre et al., 1976) с целью ограничить рост тройных моментов и исходя из того, что эти величины должны удовлетворять «условиям реализуемости»,

была предложена так называемая клиппинг-аппроксимация. Поскольку любая тройная корреляция  $\overline{\alpha'\beta'\gamma'}$  может быть представлена в виде

$$\overline{\alpha'\beta'\gamma'} = \overline{\alpha'(\beta'\gamma' - \beta'\gamma')}, \quad (4.28)$$

то используя неравенство Шварца (Воеводин и Кузнецов, 1984) для правой части формулы (4.28), можно получить

$$|\overline{\alpha'\beta'\gamma'}| \leq \overline{\alpha'^2}^{1/2} \left( \overline{\beta'^2\gamma'^2} - \overline{\beta'\gamma'^2} \right)^{1/2}. \quad (4.29)$$

Если теперь воспользоваться соотношением (4.27), то

$$\overline{\beta'^2\gamma'^2} = \overline{\beta'^2} \cdot \overline{\gamma'^2} + 2\overline{\beta'\gamma'^2},$$

и в силу симметрии условие реализуемости (4.29) приводит к соотношениям

$$|\overline{\alpha'\beta'\gamma'}| \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \left[ \overline{\alpha'^2} \left( \overline{\beta'^2} \cdot \overline{\gamma'^2} + \overline{\beta'\gamma'^2} \right) \right]^{1/2} \\ \left[ \overline{\beta'^2} \left( \overline{\alpha'^2} \cdot \overline{\gamma'^2} + \overline{\alpha'\gamma'^2} \right) \right]^{1/2} \\ \left[ \overline{\gamma'^2} \left( \overline{\alpha'^2} \cdot \overline{\beta'^2} + \overline{\alpha'\beta'^2} \right) \right]^{1/2} \end{array} \right. . \quad (4.30)$$

Наряду с рассмотренными подходами, наиболее трудоемкий из которых включает использование полного набора дифференциальных уравнений для третьих моментов (не выписаны в силу их громоздкости, но могут быть найдены в цитированной литературе) известны также модели промежуточной сложности, отличающиеся тем, что в них используются различного уровня алгебраические замыкания. Как правило, такой подход эффективен в вычислительном отношении и вполне пригоден для решения многих прикладных задач (см., например, Курбацкий и Курбацкая, 2006).

## Глава 5. Турбулентные течения вблизи твердой подстилающей поверхности

Уравнения Рейнольдса позволяют сформулировать выводы о наличии связей между различными статистическими характеристиками турбулентности, но при их интегрировании возникают трудности, обусловленные проблемой замыкания. При выборе решений этих уравнений, имеющих физический смысл, приходится задавать некоторую дополнительную информацию, например, в виде каких-то функций, описывающих турбулентность. В некоторых случаях вид таких функций может быть найден исходя из соображений теории размерности и данных экспериментов. Теории турбулентности, в которых наряду со строгими уравнениями гидромеханики используются также дополнительные эмпирические связи, установленные по экспериментальным данным или же выведенные с помощью качественных рассуждений и проверенные на опыте, называются *полуэмпирическими теориями*. Хотя такого рода построения не являются строгими, но они сыграли большую роль в развитии представлений о турбулентных течениях (Boussinesq, 1897, Taylor, 1915, 1932, Prandtl, 1925, Karman, 1930) и до сих пор используются в исследованиях по турбулентности.

### 5.1. Профиль средней скорости течения

Будем рассматривать установившиеся плоскопараллельные течения над твердой подстилающей поверхностью (стенкой) в отсутствие градиента среднего давления и плавучести. В такого рода течениях отлична от нуля лишь (продольная)  $x$ -компонента средней скорости  $\bar{u}_x = \bar{u}$ , зависящая только от (вертикальной) координаты  $z$ . Уравнения Рейнольдса принимают в этом случае следующий вид:

$$\nu \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} - \frac{d}{dz} \overline{u'w'} = 0. \quad (5.1)$$

Из этого соотношения следует, что поток  $x$ -компоненты импульса вдоль координаты  $z$ , направленный от жидкости к подстилающей поверхности, не зависит от расстояния от стенки:

$$\tau(z) = \rho \left( \nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \overline{u'w'} \right) = \tau_0 = \text{const}, \quad (5.2)$$

где  $\tau_0$  - напряжение трения на поверхности  $z=0$ . В случае ламинарного течения и с учетом граничного условия  $\bar{u} = 0$  при  $z = 0$  профиль скорости должен быть линейным:

$$\bar{u}(z) = \frac{\tau_0}{\rho \nu} z. \quad (5.3)$$

Однако, в турбулентном случае соотношение (5.2) не позволяет однозначно определить  $\bar{u}(z)$ , поскольку требуется информация о связи  $\overline{u'w'}$  с характеристиками среднего течения.

Некоторое представление о возможной форме функции  $\bar{u}(z)$  можно извлечь на основе теории размерностей. Вместо отношения  $\tau_0 / \rho$  удобно использовать т.н. *динамическую скорость*

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (5.4)$$

являющуюся естественным масштабом скорости для течения около стенки (в англоязычной литературе эта величина носит название *скорость трения*). Поскольку из параметров  $u_*$ ,  $\nu$  и  $z$  можно составить единственную безразмерную комбинацию  $zu_*/\nu$ , то общий вид зависимости профиля средней скорости может быть записан в виде (Prandtl, 1925):

$$\bar{u}(z) = u_* f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right). \quad (5.5)$$

Формула (5.5), которую называют *универсальным законом турбулентности вблизи стенки*, справедлива лишь в случае *гладкой* подстилающей поверхности, описываемой простейшим уравнением  $z = 0$ . В реальности же подстилающая поверхность является, как правило, *шероховатой*: на ней имеются неровности различной высоты. Формулу (5.5) можно применить и к течениям над динамически гладкой стенкой, для которой средняя высота  $h_0$  имеющихся на ней бугорков удовлетворяет условию

$$h_0 < z_* = \frac{\nu}{u_*}, \quad (5.6)$$

где  $z_*$  - *динамическая длина*. Если высота неровностей не удовлетворяет условию (5.6), то они также будут влиять на профиль средней скорости, что должно найти отражение в более общей, чем (5.5), формуле:

$$\bar{u}(z) = u_* f\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{h_0 u_*}{\nu}, \alpha, \beta, \dots\right), \quad (5.7)$$

где  $\alpha, \beta, \dots$  - безразмерные параметры, характеризующие форму бугорков и их распределение по поверхности стенки.

В геофизических средах (земной атмосфере и Мировом океане) горизонтальный градиент давления, как правило, отличен от нуля. Кроме того, на профиль скорости влияет еще сила Кориолиса, создаваемая вращением Земли. С учетом этих факторов уравнение (5.1) принимает вид

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial z} + f \rho \bar{v} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_y}{\partial z} - f \rho \bar{u} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad (5.8)$$

где  $\tau_x$  и  $\tau_y$  - соответствующие компоненты напряжения трения, причем  $\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2$ . Если ось  $x$  направлена вдоль приповерхностного напряжения трения, то при  $z = 0$  можно положить  $\tau_y = 0$ . Вне слоя трения первыми слагаемыми в уравнениях (5.8) можно пренебречь и движение определяется так называемыми формулами геострофического ветра (в океане - геострофического течения):

$$\bar{u} = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = G \cos \alpha, \quad \bar{v} = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -G \sin \alpha, \quad (5.9)$$

где  $G = \frac{1}{\rho f} \left[ \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$  - скорость геострофического ветра (течения), а  $\alpha$  - угол

между вектором с компонентами  $\left( -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right)$  и приземным ветром (придонным течением), то есть угол полного поворота ветра (океанского течения) в слое трения. Интегрирование по  $z$  от 0 до произвольной высоты  $H_0$  (внутри слоя трения) первого из уравнений (5.8) приводит (Монин и Яглом, 1965) к соотношению

$$u_*^2(0) - u_*^2(H_0) = \int_0^{H_0} \left( f\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) dz < \int_0^{H_0} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) dz < fGH_0. \quad (5.10)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что отбрасывание слагаемого  $f\bar{v}$  усиливает неравенство, поскольку сила Кориолиса частично компенсирует действие градиента давления. Чтобы выбрать  $H_0$  таким образом, что относительное изменение  $u_*^2$  в слое толщины  $H_0$  не превосходит некоторой величины  $\delta$

$$\frac{u_*^2(0) - u_*^2(H_0)}{u_*^2(0)} \leq \delta,$$

достаточно потребовать выполнения следующего неравенства

$$H_0 < \frac{\delta u_*^2(0)}{fG}. \quad (5.11)$$

Согласно опытным данным, величина  $u_* / G \cong 0.05$ . Поскольку в умеренных широтах  $f \sim 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ , то при  $G \sim 10 \text{ м/сек}$  и  $\delta = 20\%$  оценка толщины приземного слоя трения составит значение  $H_0 \sim 50 \text{ м}$ . В пределах этого слоя можно пренебрегать действием силы Кориолиса и обусловленным этой силой вращением ветра с высотой, а также считать динамическую скорость  $u_*$  постоянной. Аналогичный вывод можно сделать относительно придонного слоя трения в океане с той лишь разницей, что его толщина на два порядка меньше.

## 5.2. Вязкий подслей и логарифмический пограничный слой

Пусть поверхность  $z=0$  является динамически гладкой, т.е. справедливо соотношение (5.5). Вид фигурирующей в этой формуле функции  $f(z_+)$ , где  $z_+ = u_* z / \nu$ , может быть явно определен для двух предельных случаев – больших или, соответственно, малых значений аргумента  $z_+$ . На самой стенке  $u=0$  и  $w=0$ , так что  $\overline{u'w'} = 0$  и, следовательно,

$\tau_0 = \rho \nu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|_{z=0}$ . При достаточно малых  $z$  вязкое напряжение трения будет значительно превосходить по величине напряжение Рейнольдса. Слой жидкости, в котором

$\nu \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \gg \left| \overline{u'w'} \right|$ , называется *вязким подслоем*, а в его пределах, согласно формуле (5.3),  $f(z_+) = z_+$ . Толщина вязкого подслоя  $\delta_\nu$  может зависеть только от параметров  $u_*$  и  $\nu$ , так что естественно определить ее формулой  $\delta_\nu = \alpha_\nu \nu / u_* = \alpha_\nu z_*$ , где  $\alpha_\nu$  - универсальная постоянная порядка единицы. На основании экспериментальных данных чаще всего используется значение  $\alpha_\nu = 5$ .

Во втором предельном случае, вдали от твердой стенки турбулентные напряжения многократно превосходят по величине вязкие напряжения, так что при достаточно большом  $z$  (скажем, при  $z > \delta_l$ ), можно в уравнении (5.2) пренебречь слагаемым  $\rho \nu \frac{d\bar{u}}{dz}$  и считать, что  $\tau_0 = -\rho \overline{u'w'}$ . Закон изменения средней скорости не должен зависеть от вязкости  $\nu$ , а определяется лишь значениями плотности  $\rho$  и потока импульса  $\tau_0$ . В данном случае ничего нельзя сказать об абсолютных значениях скорости  $\bar{u}(z)$ , а можно лишь рассматривать разности  $\bar{u}(z_2) - \bar{u}(z_1)$  значений скорости на двух высотах  $z_2$  и  $z_1$  в пределах рассматриваемого слоя. Обусловлено это галилеевой инвариантностью уравнений механики, согласно которой добавление к  $\bar{u}(z)$  при  $z \geq \delta_l$  постоянного слагаемого не может изменить передаваемого через жидкость потока импульса. Абсолютные значения скорости в рассматриваемом слое не определяются лишь величинами  $\tau_0$  и  $z$ , а зависят от «граничного» значения  $\bar{u}(\delta_l)$ , которое, в свою очередь, обусловлено законом изменения скорости в слое  $z \leq \delta_l$ , на который влияет и вязкость.

Из параметров  $\tau_0$ ,  $\rho$  и  $z$  можно составить единственную комбинацию  $\sqrt{\tau_0 / (\rho z^2)} = u_* / z$ , имеющую размерность градиента скорости, так что при  $z > \delta_l$  должно выполняться соотношение

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = A \frac{u_*}{z}, \quad (5.12)$$

где  $A$  - универсальная безразмерная постоянная. Отсюда для профиля скорости в рассматриваемом слое следует логарифмическое выражение

$$\bar{u}(z) = Au_* \ln(z) + A_1, \quad (5.13)$$

где  $A_1$  - новая постоянная, которая уже может зависеть от коэффициента молекулярной вязкости  $\nu$ . Слой жидкости, в котором выполняется соотношение (5.13), называется *логарифмическим пограничным слоем*. Из соображений размерности вытекает, что  $\delta_l = \alpha_l \nu / u_*$ , а эмпирические данные позволяют принять  $\alpha_l = 30$ . Из сравнения формул

(5.13) и (5.5) следует, что если принять  $A_1 = \left( A \ln \frac{u_*}{\nu} + B \right) u_*$ , где  $B$  - еще одна безразмерная универсальная постоянная, то (5.13) можно переписать в виде

$$\bar{u}(z) = u_* \left( A \ln \frac{zu_*}{\nu} + B \right) \quad \text{при} \quad z > \alpha_l \frac{\nu}{u_*}. \quad (5.14)$$

Это означает, что

$$f(z_+) = A \ln z_+ + B \quad \text{при } z_+ > \alpha_1. \quad (5.15)$$

Традиционно вместо коэффициента  $A$  чаще используется величина  $\kappa = A^{-1}$ , называемая *постоянной Кармана*. Если к тому же обозначить  $e^{-\kappa B} = \beta$ , то формулу (5.14) можно переписать в виде

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{zu_*}{\beta \nu}. \quad (5.16)$$

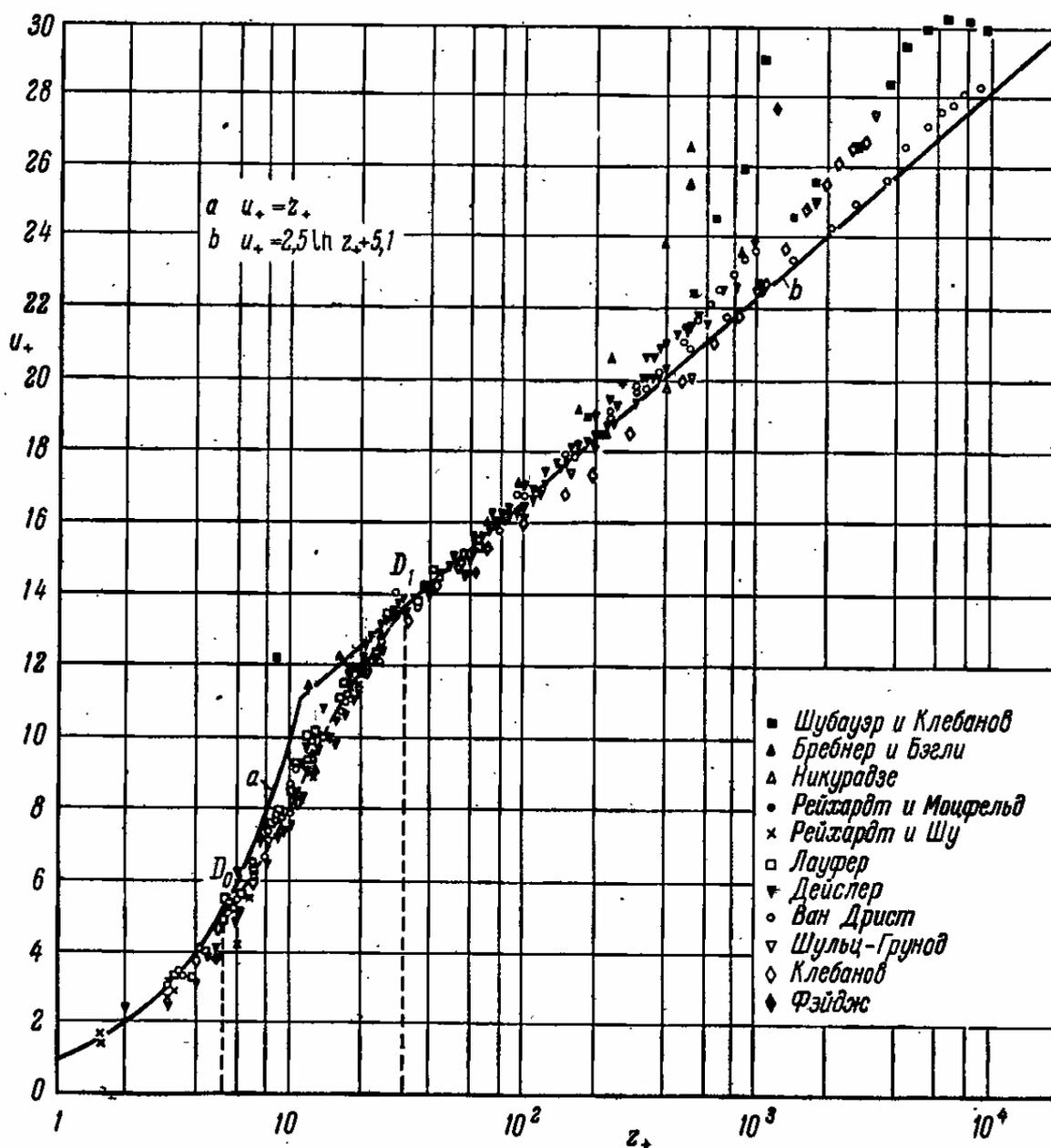


Рис. 5.1. Универсальный безразмерный профиль средней скорости турбулентного течения около гладкой стенки по данным измерений в трубах, каналах и пограничном слое (Kestin and Richardson, 1963). Здесь для  $u_+ = \bar{u}/u_*$  использована линейная шкала, а для  $z_+ = zu_*/\nu$  - логарифмическая.

В рамках  $K$ -теории вязкий подслой можно определить как область, в которой допустимо считать, что коэффициент турбулентной вязкости  $K$  равен нулю, так что эффективная вязкость равна  $\nu = \text{const}$ . Логарифмический же слой – это область, в которой молекулярная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной вязкостью, рассчитываемой по формуле

$$K = \frac{u_* z}{A} = \kappa u_* z. \quad (5.17)$$

Согласно экспериментальным данным Никурадзе (Nikuradse, 1932), можно положить  $A = 2.5$  и  $B = 5.5$ , так что  $\kappa = 0.4$  и  $\beta \approx 0.111$ , в то время как Коулс (Coles, 1955) рекомендует  $A = 2.5$  и  $B = 5.1$ . Из рис. 5.1, заимствованного из книги Мони́на и Яглома (1965), видно, что при  $z < 5\nu/u_*$  все наблюдаемые значения  $\bar{u}/u_*$  неплохо согласуются с линейным профилем формулы (5.3), а при  $30\nu/u_* < z < 500\nu/u_*$  – укладываются на логарифмическую кривую, соответствующую формуле (5.14). В промежуточной области  $5\nu/u_* < z < 30\nu/u_*$  экспериментальные значения  $\bar{u}/u_*$  довольно существенно отклоняются от обеих асимптотик. Как правило, если не требуется большая точность, то этой промежуточной зоной пренебрегают и считают, что вслед за вязким подслоем следует логарифмический слой, а их «склейка» происходит при значении абсциссы, соответствующей точке пересечения линейного и логарифмического профилей средней скорости ( $\delta_v = \delta_l = 11.1\nu/u_*$  при  $A = 2.5$  и  $B = 5.1$ ).

### 5.3. Параметр шероховатости

В случае шероховатой стенки с неровностями высоты  $h_0 > \nu/u_*$  также можно рассмотреть две асимптотики – для малых и больших значений  $z$ . При малых  $z$ , сравнимых с величиной  $h_0$ , средняя скорость  $\bar{u}(z)$  будет существенно зависеть от формы (бугорки или впадины между ними) и взаимного расположения неровностей стенки, так что рассчитывать на возможность простого аналитического описания не приходится. Если же основной интерес представляет распределение средней скорости на расстояниях  $z$ , превышающих как среднюю высоту неровностей  $h_0$ , так и динамическую длину  $z_* = \nu/u_*$ , то можно предполагать, что на таких расстояниях ни вязкость, ни локальные особенности подстилающей поверхности не будут определяющими факторами. В этих условиях правомерно использовать формулу (5.13), так что

$$\bar{u}(z) = Au_* \ln z + A_1 \quad \text{при } z \gg h_0 > \nu/u_*. \quad (5.18)$$

Постоянная  $A = 1/\kappa$  в этом соотношении определяет значение градиента средней скорости, соответствующего заданному потоку импульса  $\tau_0 = \rho u_*^2$  и не должна зависеть от свойств подстилающей поверхности. В то же время коэффициент  $A_1$  определяется условием на нижней границе области применимости формулы (5.18) и потому зависит от закона изменения средней скорости вблизи стенки. Ясно, что формулу (5.18) можно переписать в виде (5.14), но при этом коэффициент  $B$  уже не будет универсальной постоянной, а появится зависимость от геометрических характеристик подстилающей поверхности:  $B = B(h_0 u_* / \nu, \alpha, \beta, \dots)$ .

Поскольку, однако, при  $h_0 \gg \nu/u_*$  профиль средней скорости не должен зависеть от вязкости, а будет определяться лишь размерами и формой неровностей стенки, то предпочтительней в этом случае представить  $\bar{u}(z)$  в виде

$$\bar{u}(z) = u_* \left( A \ln \frac{z}{h_0} + B' \right), \quad (5.19)$$

где коэффициент  $B' = B + A \ln(h_0 u_* / \nu)$  при достаточно больших  $h_0 u_* / \nu$  слабо зависит от изменений этого параметра, то есть определяется лишь геометрическими особенностями стенки. Формулу (5.19) можно переписать в виде

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}, \quad (5.21)$$

где фигурирует новый параметр  $z_0 = h_0 e^{-\kappa B'}$ , называемый *параметром шероховатости* (или просто *шероховатостью*).

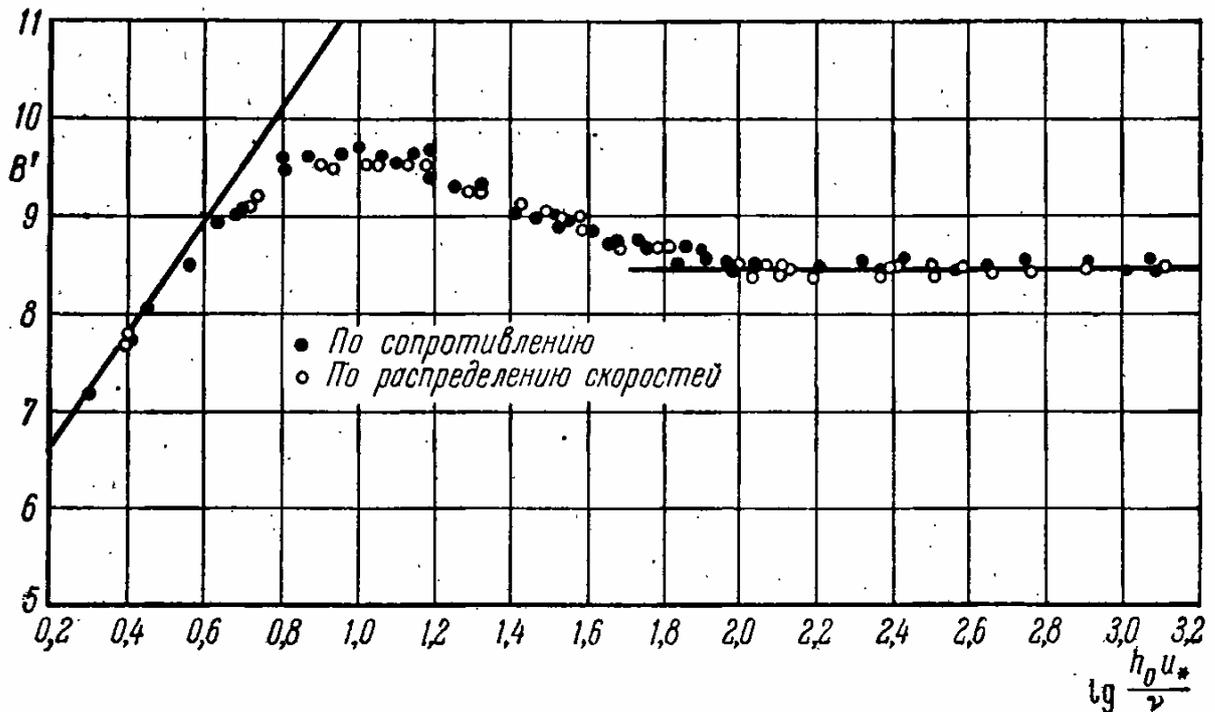


Рис. 5.2. Зависимость коэффициента  $B'$  от параметра  $h_0 u_* / \nu$  по данным Никурадзе (Nikuradse, 1933). Здесь  $\lg$  - десятичный логарифм.

Зависимость величин  $B$ ,  $B'$  и  $z_0$  от высоты неровностей стенки можно получить экспериментально, как это, например, было сделано в опытах Никурадзе (Nikuradse, 1933), проведенных в круглых трубах, на стенки которых были наклеены песчинки заданного, меняющегося от опыта к опыту, размера. Полученная в этих опытах зависимость коэффициента  $B'$  от параметра  $h_0 u_* / \nu$  приведена на рис. 5.2 (Монин и Яглом, 1965). Анализ этого рисунка показывает, что для однородной песочной шероховатости при значении  $\lg(h_0 u_* / \nu) \leq 0.6$ , соответствующем величине  $h_0 u_* / \nu \leq 4$ , справедливо соотношение

$$B' = A \ln \frac{h_0 u_*}{\nu} + B, \quad (5.22)$$

где  $A = 2.5$  и  $B = \text{const} \approx 5.5$ , так что  $z_0 \approx \frac{1}{9} \frac{\nu}{u_*}$ . Это означает, что профиль скорости не зависит от  $h_0$ , так что поверхность может рассматриваться как *динамически гладкая* (при таких  $h_0$  неоднородности полностью погружены в вязкий подслои).

При  $\lg(h_0 u_* / \nu) > 1.7$ , т.е. при  $h_0 u_* / \nu > 60$ , вязкий подслои практически не существует, а течение вблизи стенки формируется из совокупности вихрей, возникающих при обтекании отдельных бугорков. В этих условиях профиль средней скорости  $\bar{u}(z)$  не зависит от коэффициента вязкости  $\nu$ , а коэффициент  $B'$  постоянен, а именно,  $B' \approx 8.5$ , так что  $B \approx -2.5 \ln(h_0 u_* / \nu) + 8.5$  и  $z_0 = h_0 / 30$ . В этом случае подстилающую поверхность называют *динамически вполне шероховатой*.

При  $0.6 \leq \lg(h_0 u_* / \nu) \leq 1.7$ , т.е. при  $4 \leq h_0 u_* / \nu \leq 60$ , имеет место промежуточный режим, при котором вершины неоднородностей выступают из вязкого подслоя и генерируют дополнительные возмущения, в результате чего оба коэффициента  $B$  и  $B'$  оказываются зависящими от  $h_0 u_* / \nu$ . Стенку такого вида называют *динамически слегка шероховатой*.

В атмосферных условиях значения динамической скорости  $u_*$  в зависимости от метеорологических условий могут меняться в диапазоне от нескольких см/сек до величин порядка 1 м/сек. Поскольку для воздуха молекулярная вязкость  $\nu \approx 0.15 \text{ см}^2/\text{сек}$ , то подстилающая поверхность атмосферы почти всегда является динамически вполне шероховатой. Размеры ее неровностей  $h_0$  могут принимать довольно большие значения, как, например, в случае сельскохозяйственного поля или лесного массива. Особый интерес при этом представляет вид профиля средней скорости  $\bar{u}(z)$  на высотах, сравнимых с высотой  $h_0$ . Поскольку в случае вполне шероховатой стенки вязкостью можно пренебречь, то градиент  $d\bar{u}/dz$  зависит лишь от четырех параметров,  $\tau_0$ ,  $\rho$ ,  $z$  и  $h_0$ , из которых можно составить безразмерную комбинацию  $h_0/z$ . Тогда формулу (5.12) можно обобщить следующим образом:

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} f\left(\frac{h_0}{z}\right), \quad (5.23)$$

где  $f(h_0/z)$  - поправочная функция, описывающая отклонение профиля  $\bar{u}(z)$  от логарифмического распределения. Поскольку при  $z \gg h_0$  неоднородности подстилающей поверхности не должны оказывать влияния, то  $f(0) = 1$ . Учитывая, что  $\frac{h_0}{z} < 1$ , функцию  $f(h_0/z)$  можно разложить по степеням ее аргумента, так что

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \left[ 1 + a \frac{h_0}{z} + b \left(\frac{h_0}{z}\right)^2 + \dots \right]. \quad (5.24)$$

Если ввести новое начало отсчета высоты  $z = d + z'$ , где  $d$  сравнимо по порядку величины с  $h_0$  и выбрано так, что  $d = ah_0 = f'(0)h_0$ , то с точностью до членов второго порядка малости справедливо соотношение

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa(z-d)} \quad (5.25)$$

и, следовательно,

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z-d}{z_0}. \quad (5.26)$$

Таким образом, влияние конечной высоты  $h_0$  в первом приближении сводится к тому, что при не слишком малых  $z$  профиль скорости оказывается логарифмическим, начиная с некоторого уровня  $z = d$ , именуемого *высотой* (или *толщиной*) *вытеснения*. На практике параметр  $d$  часто определяется как  $2h_0/3$ . Характерные значения параметра шероховатости и высоты вытеснения приведены в табл. 5.1, заимствованной из монографии Оке (Оке, 1978).

Таблица 5.1. Аэродинамические свойства естественных поверхностей.

Поверхность	Характеристика поверхности	Параметр шероховатости $z_0$ , м	Высота вытеснения $d$ , м
Вода	Спокойная (в открытом море)	$(0.1-10) \cdot 10^{-5}$	
Лед	Гладкий	$10^{-5}$	
Снег		$(0.5-10) \cdot 10^{-4}$	
Песок, пустыня		$3 \cdot 10^{-4}$	
Оголенные почвы		0.001 – 0.01	
Трава (0.02 – 0.1 м)		0.003 – 0.01	$\leq 0.07$
Трава (0.25 – 1.0 м)		0.04 – 0.10	$\leq 0.66$
Злаковые культуры	Зависит от скорости ветра	0.04 – 0.20	$\leq 3.0$
Сады	Зависит от скорости ветра	0.5 – 1.0	$\leq 4.0$
Леса лиственные	Зависит от скорости ветра	1.0 – 6.0	$\leq 20.0$
Леса хвойные	Зависит от скорости ветра	1.0 – 6.0	$\leq 30.0$

В таблице отмечено, что при высокой травяной и древесной растительности параметр шероховатости может зависеть от средней скорости ветра, воздействующей на форму поверхности их покрова. То же самое относится и к водным поверхностям, высота и форма неровностей которых также зависят от скорости ветра. Пренебрегая вязкостью и поверхностным натяжением воды, а также предполагая, что шероховатость моря в данной точке его поверхности зависит лишь от локальных атмосферных условий, из соображений размерности для параметра шероховатости  $z_0$  можно получить (Charnock, 1955) следующее соотношение, получившее название *формулы Чарнока*:

$$z_0 = \gamma \frac{u_*^2}{g}, \quad (5.27)$$

где  $g$  - ускорение силы тяжести, а коэффициент  $\gamma$  - безразмерная, определяемая экспериментальным путем, величина порядка  $10^{-3}$ . При достаточно большой скорости ветра, эта формула оказывается справедливой также для условий снежных и песчаных бурь, когда частицы снега или песка отрываются от поверхности и переносятся воздушным потоком (Chamberlain, 1983).

#### 5.4. Профиль пассивной примеси

Пусть на граничной гладкой поверхности  $z = 0$  плоскопараллельного течения жидкости в полупространстве  $z > 0$  поддерживается постоянное значение концентрации примеси  $b_0$ . При этом в жидкости будет иметь место постоянный ее поток  $q$ , направленный от поверхности вдоль положительного направления оси  $z$ :

$$q(z) = \rho \chi \frac{d\bar{b}}{dz} - \rho \overline{b'w'} = q_0 = \text{const}. \quad (5.28)$$

Профиль средней концентрации  $\bar{b}$  будет зависеть от статистических характеристик поля скорости (параметры  $\nu$  и  $u_*$ ), а также от коэффициента молекулярной диффузии  $\chi$ , плотности  $\rho$  и интенсивности переноса примеси, характеризуемой значением потока  $q_0$ . В силу соображений размерности

$$\bar{b}(z) - b_0 = \frac{q_0}{\rho \kappa u_*} \varphi\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{\nu}{\chi}\right) = b_* \varphi(z_+, \text{Pr}), \quad (5.29)$$

где  $b_* = q_0 / \kappa u_* \rho$ , а  $\varphi(z_+, \text{Pr})$  - универсальная функция от двух переменных, удовлетворяющая условию  $\varphi(0, \text{Pr}) = 0$ .

В случае достаточно больших значений  $z$  ( $z \gg z_* = \nu / u_*$ ) вид этой функции можно конкретизировать, поскольку коэффициент вязкости  $\nu$  выпадает из числа определяющих параметров, а если предположить, что на этих высотах турбулентный поток примеси  $\rho \overline{b'w'}$  много больше молекулярного  $\rho \chi d\bar{b} / dz$ , то и коэффициент  $\chi$  не будет влиять на профиль  $\bar{b}$ . Если по порядку величины число Прандтля  $\text{Pr} \geq 1$ , т.е.  $\chi \leq \nu$ , то эти условия выполнены, поскольку турбулентные потоки примесей (и других скалярных величин) порождаются тем же вихревым пульсационным движением, что и турбулентный поток импульса и потому коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентной диффузии можно считать одинакового порядка, а именно, порядка величины  $u_* z$ . Если же  $\text{Pr} \ll 1$ , то турбулентный коэффициент диффузии будет намного превосходить молекулярный коэффициент  $\chi$  лишь при  $z \gg \chi / u_* = \text{Pr}^{-1} z_*$ . Таким образом, влиянием молекулярных эффектов на профиль средней концентрации примеси можно пренебречь, если выполняется условие  $z / z_* \geq \max(1, \text{Pr}^{-1})$ .

При этом условии градиент средней примеси зависит лишь от параметров  $q_0 / \rho$ ,  $u_*$  и  $z$ , так что в силу соображений теории размерности

$$\frac{d\bar{b}}{dz} = \frac{q_0}{\alpha \rho k u_* z} = \frac{b_*}{\alpha z}, \quad (5.30)$$

где  $\alpha$  - новая безразмерная постоянная. Интегрирование (5.30) по высоте приводит к соотношению

$$\bar{b}(z) - b_0 = \frac{b_*}{\alpha} \ln z + A_1, \quad (5.31)$$

причем постоянная  $A_1$ , как и для средней скорости, должна определяться из условия «склейки» логарифмического профиля (5.31) с профилем средней примеси в нижележащем слое. Из формулы (5.31) следует, что

$$\varphi(z_+, \text{Pr}) = \frac{1}{\alpha} \ln z_+ + C. \quad (5.32)$$

Поскольку профилю (5.31) соответствует коэффициент турбулентной диффузии  $K_b = \alpha k u_* z = \alpha K$ , то постоянная  $\alpha^{-1}$  имеет смысл турбулентного числа Прандтля для логарифмического пограничного слоя  $\text{Pr}_t = K / K_b$ .

## Глава 6. Турбулентность в стратифицированной среде

Важной особенностью геофизической турбулентности является наличие плотностной стратификации по вертикали, в результате которой в атмосфере и океане на турбулентные неоднородности действуют архимедова сила ( $-\rho'g$ ), способствующая всплытию частиц, менее плотных ( $\rho' < 0$ ), чем окружающая среда, и перемещению вниз более плотных ( $\rho' > 0$ ) частиц. Архимедова сила дополняет силы чисто гидродинамического происхождения, которые действуют на частицы среды и в отсутствие силы тяжести. Величина  $B = -\overline{\rho'w'g} = -\overline{\rho b'w'}$  представляет собой среднюю работу архимедовой силы при турбулентных перемещениях элементов жидкости и описывает, таким образом, взаимные превращения кинетической энергии турбулентности и потенциальной энергии расслоенной по плотности среды в поле силы тяжести. Если вертикальная стратификация плотности среды устойчива (плотность убывает с высотой), то вертикальные перемещения турбулентных элементов сопровождается затратой ( $B < 0$ ) кинетической энергии на работу против архимедовой силы. В случае неустойчивой стратификации работа архимедовой силы совершается за счет потенциальной энергии ( $B > 0$ ) и пополняет таким образом кинетическую энергию турбулентности.

### 6.1. Теория подобия Монина-Обухова для стратифицированной турбулентности вблизи подстилающей поверхности

Законы изменения средней скорости и других характеристик турбулентной среды (например, средней температуры) на значительных расстояниях от подстилающей поверхности, на которых непосредственное ее влияние уже не ощущается, должны лишь определяться значениями потоков импульса  $\tau_0$  и плавучести  $q_0$ . При этом в случае безразличной стратификации ( $q_0 = 0$ ) влияние архимедовой силы на турбулентность отсутствует, так что должны выполняться положения теории логарифмического пограничного слоя. Итак, при  $z \ll z_0$  характеристики турбулентности на высоте  $z$  будут зависеть лишь от трех величин:  $z$ ,  $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$  и  $q_0$ , из которых можно составить лишь одну независимую безразмерную комбинацию  $\zeta = z / L$ , где

$$L = \frac{u_*^3}{\kappa q_0} \quad (6.1)$$

есть масштаб длины (*масштаб Монина-Обухова*). При этом в условиях устойчивой стратификации ( $q_0 > 0$ ) величина  $L > 0$ . Согласно теории Монина и Обухова (1954), зависимость от высоты любой осредненной характеристики  $\bar{f}$  развитого турбулентного режима в приповерхностном слое может быть постулирована следующим образом:

$$\frac{\bar{f}(z)}{f_0} = F\left(\frac{z}{L}\right), \quad (6.2)$$

где  $f_0$  - величина размерности  $\bar{f}$ , а  $F(\zeta)$  - универсальная функция.

Рассматривая далее, если не оговорено другое, для определенности случай атмосферы и предполагая, что флуктуации ее плотности обусловлены лишь пульсациями температуры,

то  $\rho' = -\rho_0 T' / T_0$  и величина  $q_0$  в формуле (6.1) следующим образом может быть выражена через параметр плавучести  $g / T_0$  и поток тепла  $H_0$ :

$$q_0 = -\frac{g}{T_0} \frac{H_0}{c_p \rho_0}. \quad (6.3)$$

В качестве масштаба для осредненной скорости ветра следует принять динамическую скорость  $u_* / \kappa$ , а для осредненной температуры – величину  $T_* = -H_0 / c_p \rho_0 u_*$ . Естественным масштабом для коэффициента турбулентности  $K$  будет величина  $\kappa u_* |L|$ . Для вертикальных градиентов средней скорости ветра и температуры справедливы следующие соотношения

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa L} g_M(\zeta), \quad \frac{d\bar{T}}{dz} = \frac{T_*}{\kappa L} g_H(\zeta), \quad (6.4)$$

где  $g_M(\zeta)$  и  $g_H(\zeta)$  – универсальные функции параметра  $\zeta$ . Формулы (6.4) являются обобщением основных формул логарифмического пограничного слоя на случай температурно-стратифицированной среды. Турбулентные коэффициенты обмена для импульса  $K$  и тепла  $K_T$  также могут быть выражены через эти универсальные функции

$$K = \frac{u_*^2}{d\bar{u}/dz} = \frac{\kappa u_* L}{g_M(\zeta)}, \quad K_T = -\frac{H_0 / c_p \rho_0}{d\bar{T}/dz} = \frac{\kappa u_* L}{g_H(\zeta)}, \quad (6.5)$$

так что их отношение  $K_T / K = g_M(\zeta) / g_H(\zeta) = \alpha(\zeta)$  также является некоторой универсальной функцией от  $\zeta$ . Число Ричардсона для температурно-стратифицированной среды также может быть записано с помощью универсальных функций

$$\text{Ri} = \frac{g}{T_0} \frac{d\bar{T}/dz}{(d\bar{u}/dz)^2} = \frac{g_H(\zeta)}{g_M^2(\zeta)}, \quad (6.6)$$

как и динамическое число Ричардсона:

$$\text{Rf} = -\frac{g}{c_p T_0} \frac{H_0}{\tau_0 d\bar{u}/dz} = \frac{1}{g_M(\zeta)}. \quad (6.7)$$

При этом легко убедиться, что  $K = \kappa u_* L \cdot \text{Rf}$ . Сами профили скорости и температуры в слое могут быть получены интегрированием уравнений (6.4):

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(z_0) + \frac{u_*}{\kappa} \left[ f_M\left(\frac{z}{L}\right) - f_M\left(\frac{z_0}{L}\right) \right], \quad (6.8)$$

$$\bar{T}(z) = \bar{T}(z_0) + \frac{T_*}{\kappa} \left[ f_H\left(\frac{z}{L}\right) - f_H\left(\frac{z_0}{L}\right) \right], \quad (6.9)$$

где  $f_M(\zeta) = \int g_M(\xi) d\xi$  и  $f_H(\zeta) = \int g_H(\xi) d\xi$ .

## 6.2. Универсальные функции

Возможны два качественно различных режима турбулентности в приповерхностном слое атмосферы, соответствующих случаям устойчивой стратификации (поток тепла направлен вниз, т.е.  $H_0 < 0$  и, следовательно,  $L > 0$  и  $T_* > 0$ ) и неустойчивой стратификации ( $H_0 > 0$ ,  $L < 0$  и  $T_* < 0$ ). Оба этих режима должны «стыковаться» при переходе к безразличной стратификации, т.е. при  $H_0 \rightarrow 0$ . В связи с этим, и универсальные функции распадаются на две отдельные ветви: при  $\zeta \geq 0$  и при  $\zeta \leq 0$ . Первую из формул (6.5) удобно переписать в виде

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \zeta g_M(\zeta) = \frac{u_*}{\kappa z} \varphi_M(\zeta), \quad (6.10)$$

где  $\varphi_M(\zeta) = \zeta g_M(\zeta) = \zeta f'_M(\zeta)$ . Если при фиксированных значениях  $z$  и  $u_*$  осуществить предельный переход  $H_0 \rightarrow 0$ , то масштаб Монина-Обухова  $L$  будет неограниченно возрастать по абсолютной величине, так что  $\zeta = z/L$  стремится к нулю. В этом пределе должна справедлива обычная формула логарифмического пограничного слоя  $d\bar{u}/dz = u_*/\kappa z$  и потому функция  $\varphi_M$  должна удовлетворять следующему условию:

$$\varphi_M(0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta f'_M(\zeta) = 1. \quad (6.11)$$

Поскольку функцию  $\varphi_M(\zeta)$  естественно считать непрерывной, то при фиксированных значениях  $H_0$  и  $u_*$ , но достаточно малом  $z \ll L$ , значение  $\varphi_M(\zeta)$  будет близко к единице. Это означает, что на таких высотах условия турбулентного обмена мало отличаются от условий обмена в безразлично стратифицированной среде. Таким образом, масштаб  $L$  определяет толщину слоя, который можно назвать *подслоем динамической турбулентности*.

При небольших значениях  $\zeta = z/L$  функцию  $\varphi_M(\zeta) = \zeta f'_M(\zeta)$  можно представить в виде степенного ряда:

$$\varphi_M(\zeta) = 1 + \beta\zeta + \gamma\zeta^2 + \dots,$$

так что для функции  $f_M(\zeta)$  в условиях, близких к нейтральной стратификации, получается следующее выражение:

$$f_M(\zeta) = \text{const} + \ln|\zeta| + \beta\zeta + \frac{\gamma}{2}\zeta^2 + \dots \quad (6.12)$$

Если ограничиться лишь линейной аппроксимацией функции  $\varphi_M(\zeta)$ , то профиль средней скорости  $\bar{u}(z)$  может быть представлен как

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \left( \ln \frac{z}{z_0} + \beta \frac{z - z_0}{L} \right). \quad (6.13)$$

Поскольку случаям  $\zeta \leq 0$  и  $\zeta \geq 0$  соответствуют два качественно различных режима турбулентности и нет оснований предполагать, что функция  $\varphi_M(\zeta)$ , будучи непрерывной в точке  $\zeta = 0$ , является еще и аналитической в данной точке, то этим режимам могут соответствовать различные значения коэффициента  $\beta$ .

Исследование поведения функций  $\varphi_M(\zeta)$  и  $f_M(\zeta)$  при очень больших значениях  $|\zeta| = z/|L|$  целесообразно начать со случая сильной неустойчивости, то есть больших отрицательных значений  $\zeta$ . При этом можно рассматривать либо большие значения  $z \ll |L|$  при фиксированных  $H_0 > 0$ ,  $g/T_0$  и  $u_*$ , либо предельный переход  $u_* \rightarrow 0$  (т.е.  $L \rightarrow 0$ ) при фиксированных  $H_0 > 0$ ,  $g/T_0$  и  $z$ . Этот предельный переход отвечает случаю чисто *термической турбулентности* в условиях так называемой *свободной конвекции*, характеризуемой наличием неустойчивой стратификации с  $H_0 > 0$  и отсутствием ветра. При этом турбулентность получает энергию не из энергии осредненного движения, а из энергии (температурной) неустойчивости, и реализуется в виде совокупности тепловых струек, возникающих над отдельными участками подстилающей поверхности. Из величин  $g/T_0$  и  $H_0/c_p\rho_0$  нельзя образовать никакого масштаба длины, а величину  $u_*$  можно сократить во второй из формул (6.4) и в соотношении (6.9) только лишь в случае  $g_H(\zeta) \propto \zeta^{-4/3}$  и  $f_H(\zeta) \propto \zeta^{-1/3} + \text{const}$ . Таким образом, при  $\zeta \ll -1$  можно записать

$$g_H(\zeta) = -\frac{C_1 \kappa^{4/3}}{3} \zeta^{-4/3}, \quad f_H(\zeta) = \text{const} + C_1 \kappa^{4/3} \zeta^{-1/3} \quad (6.14)$$

и, следовательно (Prandtl, 1932, Обухов, 1946),

$$\frac{d\bar{T}}{dz} = -\frac{C_1}{3} \left( \frac{H_0}{c_p \rho_0} \right)^{2/3} \left( \frac{g}{T_0} \right)^{-1/3} z^{-4/3}, \quad (6.15)$$

$$\bar{T}(z) = T_\infty + C_1 \left( \frac{H_0}{c_p \rho_0} \right)^{2/3} \left( \frac{gz}{T_0} \right)^{-1/3}$$

при  $z \ll |L|$ ,  $L < 0$ . Коэффициент обмена для тепла в условиях свободной конвекции равен

$$K_T = -\frac{H_0}{c_p \rho_0 d\bar{T}/dz} = \frac{3}{C_1} \left( \frac{H_0}{c_p \rho_0} \frac{g}{T_0} \right)^{1/3} z^{4/3} \quad (6.16)$$

и с высотой быстро возрастает.

Поскольку в отсутствие  $u_*$  из величин  $H_0/c_p\rho_0$ ,  $g/T_0$ ,  $\rho_0$  и  $z$  нельзя составить никакой безразмерной комбинации, то все безразмерные характеристики, определяемые этими параметрами, должны иметь постоянное (универсальное) значение. В частности, в условиях свободной конвекции

$$\frac{K_T}{K} = \alpha_{-\infty} = \text{const}, \quad K = \frac{K_T}{\alpha_{-\infty}} = \frac{3}{C_1 \alpha_{-\infty}} \left( \frac{H_0}{c_p \rho_0} \frac{g}{T_0} \right)^{1/3} z^{4/3},$$

где  $\alpha_{-\infty} = \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \alpha(\zeta)$ . Это означает, что при  $\zeta \ll -1$  (т.е. при  $H_0 > 0$  и  $z \ll |L|$ ) справедливы следующие соотношения

$$g_M(\zeta) = -\frac{C_2}{3} \zeta^{-4/3}, \quad \varphi_M(\zeta) = -\frac{C_2}{3} \zeta^{-1/3}, \quad f_M(\zeta) = \text{const} + C_2 \zeta^{-1/3}, \quad (6.17)$$

где  $C_2 = C_1 \kappa^{4/3} \alpha_{-\infty}$ , так что для слоя  $[h, z]$  ( $h \ll |L|$ ) можно записать (Prandtl, 1932, Обухов, 1946):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dz} &= \frac{C_2}{3\kappa^{4/3}} u_*^2 \left( \frac{H_0}{c_p \rho_0} \frac{g}{T_0} \right)^{-1/3} z^{-4/3}, \\ \bar{u}(z) &= \bar{u}(h) + \frac{C_2}{\kappa^{4/3}} u_*^2 \left( \frac{H_0}{c_p \rho_0} \frac{g}{T_0} \right)^{-1/3} (h^{-1/3} - z^{-1/3}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Числа Ричардсона  $Ri$  и  $Rf$  в условиях свободной конвекции выражаются соотношениями

$$Ri = -\frac{3}{C_2 \alpha_{-\infty}} \left( \frac{z}{|L|} \right)^{4/3}, \quad Rf = \alpha Ri = -\frac{3}{C_2} \left( \frac{z}{|L|} \right)^{4/3},$$

из которых следует, что оба этих числа с возрастанием  $z$  неограниченно возрастают по абсолютной величине.

Во втором предельном случае  $\zeta \rightarrow +\infty$  исследование асимптотического поведения функций  $\varphi_M(\zeta)$  и  $f_M(\zeta)$  соответствует рассмотрению профиля средней скорости  $\bar{u}(z)$  либо при больших  $z$  (фиксированное  $L > 0$ ), либо при фиксированном  $z$ , но малых положительных  $L$ , соответствующих условиям очень резких инверсий температуры. В предельном случае сильно устойчивой стратификации и исчезающее слабого ветра существование крупных турбулентных возмущений становится невозможным, поскольку требовалось бы затрачивать слишком много энергии на работу против архимедовой силы. Турбулентный обмен между различными слоями жидкости крайне затруднен и турбулентность приобретает локальный характер. Это означает, что характеристики турбулентного обмена, такие, например, как коэффициент турбулентности  $K$  и динамическое число Ричардсона  $Rf = K / \kappa u_* L$ , не должны явно зависеть от расстояния  $z$  до подстилающей поверхности. Предполагается, что с ростом  $\zeta$  величина  $Rf$  монотонно растет, достигая некоторого предельного значения  $R$ , такого, что при  $z \ll L$

$$Rf \approx R = \text{const}, \quad K \approx \kappa u_* L R$$

и, следовательно,

$$g_M(\zeta) = \frac{1}{R} = \text{const}, \quad \varphi_M(\zeta) = \frac{\zeta}{R} = C_3 \zeta, \quad f_M(\zeta) = \text{const} + C_3 \zeta, \quad (6.19)$$

так что

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(h) + \frac{u_*}{\kappa RL}(z-h). \quad (6.20)$$

Схематический вид (Монин и Яглом, 1965) универсальных функций  $\varphi(\zeta)$  и  $f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$  представлен на рис. 6.1. Слагаемое  $-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$  здесь добавлено, чтобы устранить неопределенность в выборе констант интегрирования.

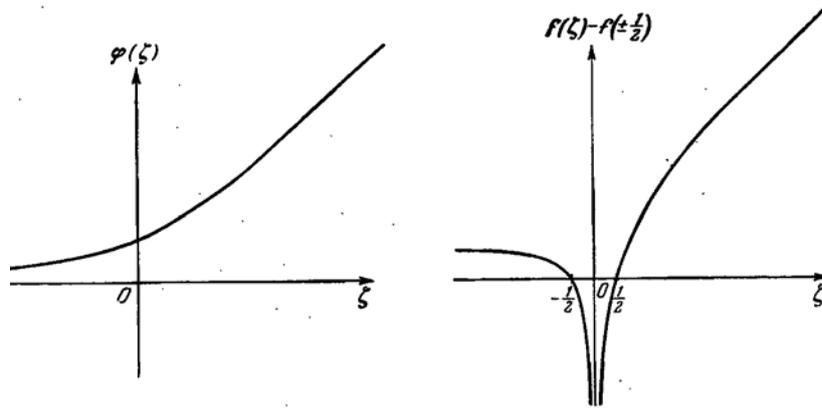


Рис. 6.1. Схематический вид универсальных функций: слева – функция  $\varphi(\zeta)$ , справа – функция  $f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ .

Формулы (6.8) и (6.9) удобно представить в виде

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \left[ \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - \psi_M\left(\frac{z}{L}\right) + \psi_M\left(\frac{z_0}{L}\right) \right], \quad (6.21)$$

$$\bar{T}(z) = \bar{T}(z_H) + \frac{T_*}{\kappa} \left[ \ln\left(\frac{z}{z_H}\right) - \psi_H\left(\frac{z}{L}\right) + \psi_H\left(\frac{z_H}{L}\right) \right], \quad (6.22)$$

где  $z_H$  - параметр шероховатости для скалярных величин, вообще говоря, отличный от параметра динамической шероховатости  $z_0$ ; использовано граничное условие «прилипания»  $\bar{u}(z_0) = 0$  и

$$\psi_M(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{1 - \varphi_M(\xi)}{\xi} d\xi, \quad \psi_H(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{1 - \varphi_H(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (6.23)$$

Экспериментальным образом было установлено, что в условиях умеренной неустойчивости ( $-2 \leq \zeta \leq 0$ ) справедливы следующие, хорошо аппроксимирующие данные наблюдений, соотношения, получившие название формул Бусинжера-Дайера (Businger et al., 1971, Dyer, 1974):

$$\varphi_M = (1 - \gamma\zeta)^{-1/4}, \quad \varphi_H = (1 - \gamma\zeta)^{-1/2} \quad (6.24)$$

со значениями параметра  $\gamma$  в диапазоне от 16 до 28. Соответствующие «интегральные» универсальные функции  $\psi$  имеют следующий вид (Paulson, 1970):

$$\begin{aligned}\psi_M(\zeta) &= \ln \left[ \frac{1}{8} (1 + \varphi_M^{-2}) (1 + \varphi_M^{-1})^2 \right] - 2 \operatorname{arctg} \varphi_M^{-1} + \pi / 2, \\ \psi_H(\zeta) &= 2 \ln \left[ \frac{1}{2} (1 + \varphi_H^{-1}) \right].\end{aligned}\quad (6.25)$$

Если эффекты конвекции доминируют по сравнению со сдвигом средней скорости (в частности, в случае слабых ветров), так что  $\zeta \ll -1$ , то необходимо, чтобы универсальные функции удовлетворяли асимптотике свободной конвекции. В работе (Carl et al., 1973) предложена следующая, основанная на обработке экспериментальных данных, аппроксимация функции  $\varphi_M$ :

$$\varphi_M = (1 - 16\zeta)^{-1/3},$$

которой соответствует интегральная функция

$$\psi_M = \frac{3}{2} \ln \left[ \frac{1}{3} (\varphi_M^{-2} + \varphi_M^{-1} + 1) \right] - \sqrt{3} \left( \operatorname{arctg} \frac{2\varphi_M^{-1} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3} \right).\quad (6.26)$$

Аналогичная, степени  $-1/3$ , зависимость должна иметь место и для функции  $\varphi_H$ . Для того, чтобы «сшить» формулы Бусинджера-Дайера и соотношения, описывающие режим свободной конвекции, можно использовать (Кзаков и Лыкосов, 1982) следующее представление

$$\varphi_a = (b_a - c_a \zeta)^{-1/3} \text{ при } \zeta < \zeta_a,\quad (6.27)$$

где  $a$  -  $M$  или  $H$ , коэффициенты  $b_a$  и  $c_a$  выбраны так, чтобы функции  $\varphi_a$  и их первые производные были бы непрерывными в точке сшивки  $\zeta = \zeta_a$ .

В случае устойчивой стратификации линейная аппроксимация универсальных функций достаточно хорошо подтверждается результатами обработки данных наблюдений лишь для относительно небольших значений  $0 < \zeta < 2$  (Businger et al., 1971). В работе (Beljaars and Holtslag, 1991) предложены более общие выражения для интегральных универсальных функций:

$$\begin{aligned}-\psi_M &= a\zeta + b \left( \zeta - \frac{c}{d} \right) e^{-d\zeta} + \frac{bc}{d}, \\ -\psi_H &= \left[ \left( 1 + \frac{2}{3} a \right) \zeta \right]^{3/2} + b \left( \zeta - \frac{c}{d} \right) e^{-d\zeta} + \frac{bc}{d} - 1,\end{aligned}\quad (6.28)$$

где  $a=1$ ,  $c=5$ ,  $d=0.35$ , а  $b=(c-a)/(c+1)$ . Нетрудно видеть, что формулы (6.28), нелинейные по  $\zeta$ , близки к традиционным линейным формулам (с  $\beta=c$ ) при малых значениях  $\zeta$ . Особый интерес представляет динамическое число Ричардсона  $Rf$ , связанное с  $\zeta$  и функцией  $\psi_M$  соотношением

$$\text{Rf} = \frac{\zeta}{1 - \zeta d\psi_M / d\zeta}. \quad (6.29)$$

Легко убедиться, что  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \text{Rf} = \text{Rf}_\infty$ , причем «критическое значение»  $\text{Rf}_\infty = \beta^{-1}$  для функции  $\psi_M$ , задаваемой линейной формулой, и  $\text{Rf}_\infty = a^{-1}$  - в более общем случае (6.28). Согласно теоретическим представлениям (Монин и Обухов, 1954), стационарная развитая турбулентность над статистически однородной подстилающей поверхностью не может существовать при  $\text{Rf} > 1$ . Используемые на практике значения констант  $\beta = 5$  и  $a = 1$  удовлетворяют этому требованию. Следует, правда, заметить, что в реальных условиях подстилающая поверхность редко бывает однородной, а происходящие над ней процессы – стационарными.

При параметризации процессов взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью формулы турбулентные потоки импульса и тепла удобно представить в виде, используемом при так называемом *аэродинамическом* подходе. Введем коэффициент сопротивления  $C_d$  с помощью соотношения

$$\tau / \rho = C_d \bar{u}^2. \quad (6.30)$$

Поскольку в слое постоянных потоков  $\tau = \tau_0$ , то

$$C_d = \left( \frac{u_*}{\bar{u}} \right)^2 = \kappa^2 \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) - \psi_M \left( \frac{z}{L} \right) + \psi_M \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]^{-2}. \quad (6.31)$$

Аналогичным образом вводится коэффициент теплопередачи  $C_H$ :

$$H / c_p \rho = -C_H \bar{u} \Delta \bar{T}, \quad (6.32)$$

где  $\Delta \bar{T} = \bar{T}(z) - \bar{T}(z_H)$ , а

$$C_H = \kappa^2 \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) - \psi_M \left( \frac{z}{L} \right) + \psi_M \left( \frac{z_0}{L} \right) \right]^{-1} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_H} \right) - \psi_H \left( \frac{z}{L} \right) + \psi_H \left( \frac{z_H}{L} \right) \right]^{-1}. \quad (6.33)$$

Как следует из данных наблюдений, полученных для естественных и искусственных поверхностей (Garratt and Hicks, 1973), значения параметров шероховатости  $z_0$  и  $z_H$ , вообще говоря, могут не совпадать. Обработка этих данных позволяет получить (Казаков и Лыков, 1982) следующие соотношения, связывающие эти две величины:

$$\ln(z_0 / z_H) = \begin{cases} -2.43 & \text{Re}_* \leq 0.11 \\ 0.83 \ln \text{Re}_* - 0.6 & \text{при } 0.11 \leq \text{Re}_* \leq 16.3, \\ 0.49 \text{Re}_*^{0.45} & \text{Re}_* \geq 16.3 \end{cases} \quad (6.34)$$

где  $\text{Re}_* = u_* z_0 / \nu$  - одна из специальных форм числа Рейнольдса.

### 6.3. Взвешенные частицы в турбулентном потоке

При большой скорости ветра, например,  $\bar{u} > 8$  м/сек, во взаимодействии атмосферы с подстилающей поверхностью возникают новые эффекты. На океане развитие поверхностного волнения приводит к тому, что в штормовых условиях не только меняется шероховатость поверхности, но и возникает приповерхностный слой с большим количеством капель воды. На суше в результате действия сил напряжения трения мелкие частицы (снега, пыли, песка и т.д.) также отрываются от подстилающей поверхности и находятся в потоке во взвешенном состоянии. Если концентрация частиц достаточно велика, то среду можно рассматривать как двухфазную жидкость, плотность которой определяется, в том числе, и концентрацией частиц. Существенное уменьшение аэродинамического сопротивления (Barenblatt and Golitsyn, 1974, Wamser and Lykossov, 1995) в такого рода течениях сказывается и на характере турбулентного переноса во внешней (по отношению к приповерхностному слою) области пограничного слоя атмосферы.

Плотность  $\rho$  смеси «воздух – частицы» может быть представлена следующим образом:

$$\rho = \rho_a(1 - \bar{S}) + \rho_p \bar{S} = \rho_a(1 + \varepsilon_e \bar{S}), \quad (6.35)$$

где  $\rho_a$  - плотность воздуха,  $\rho_p$  - плотность частиц,  $\bar{S}(z)$  - (средняя) объемная концентрация частиц, а  $\varepsilon_e = (\rho_p - \rho_a) / \rho_a$ . Масштаб Монина-Обухова для этих условий может быть записан в виде

$$L = \frac{\rho_a(1 + \varepsilon_e \bar{S})u_*^3}{\kappa g [\rho_a' w' (1 - \bar{S}) + \rho_a \varepsilon_e \overline{S'w'}]}. \quad (6.36)$$

В отсутствие частиц ( $\bar{S} \equiv 0$  и  $\overline{S'w'} \equiv 0$ ) соотношения (6.35) и (6.36) приводят к полученному Мониним и Обуховым (1954) выражению

$$L = -\frac{T_0 u_*^3}{\kappa g \overline{T'w'}}.$$

В случае же термически безразличной стратификации ( $\overline{T'w'} \equiv 0$ ) параметр  $L$  следующим образом выражается через характеристики частиц:

$$L = \frac{(1 + \varepsilon_e \bar{S})u_*^3}{\kappa g \varepsilon_e \overline{S'w'}}. \quad (6.37)$$

Если воспользоваться уравнением баланса в стационарном приближении

$$\frac{d}{dz} (\overline{S'w'} - w_f \bar{S}) = 0, \quad (6.38)$$

где  $w_f$  - скорость гравитационного оседания частиц, а также учесть, что  $\bar{S} \rightarrow 0$  и  $\overline{S'w'} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , то выражение (6.37) для масштаба  $L$  может быть переписано в виде

$$L = \frac{(1 + \varepsilon_e \bar{S}) u_*^3}{\kappa g w_f \varepsilon_e \bar{S}}. \quad (6.39)$$

Поскольку  $L > 0$ , т.е. стратификация плотности устойчива, то можно воспользоваться соответствующими формулами для универсальных функций. Предполагая, что  $\varepsilon_e \bar{S} \ll 1$ , уравнение для средней скорости (6.10) можно записать следующим образом:

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{d\bar{u}}{dz} = 1 + \frac{\beta \kappa g w_f \varepsilon_e z \bar{S}}{u_*^3}. \quad (6.40)$$

Предполагая, что  $\overline{S'w'} = -Kd\bar{S}/dz = -\kappa u_* z d\bar{S}/dz$ , уравнение для средней концентрации частиц может быть записано в виде

$$\frac{d\bar{S}}{dz} + \frac{w_f \bar{S}}{\kappa u_* z} \left( 1 + \frac{\beta \kappa g w_f \varepsilon_e z \bar{S}}{u_*^3} \right) = 0. \quad (6.41)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию  $\bar{S} = \bar{S}_r$  на некоторой высоте  $z = z_r$ , записывается следующим образом (Taylor and Dyer, 1977):

$$\bar{S}(z) = \frac{\bar{S}_r (1 - \omega) (z/z_r)^{-\omega}}{1 - \omega + \tilde{\beta} [(z/z_r)^{1-\omega} - 1]}, \quad (6.42)$$

где  $\omega = w_f / \kappa u_*$ , а  $\tilde{\beta} = \beta \kappa^2 g \varepsilon_e z_r \bar{S}_r / u_*^2$ . При  $\omega \rightarrow 1$  решение (6.42) сходится к

$$\bar{S}(z) = \frac{\bar{S}_r (z/z_r)^{-1}}{1 + \tilde{\beta} \ln(z/z_r)}. \quad (6.43)$$

Зная распределение  $\bar{S}(z)$ , из уравнения (6.40) можно получить профиль средней скорости

$$\bar{u}(z) = \bar{u}_r + \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_r} \right) + \frac{u_*}{\kappa} \begin{cases} \omega^{-1} \ln \left( 1 + \frac{\tilde{\beta} \omega^2 \left[ \left( \frac{z}{z_r} \right)^{1-\omega} - 1 \right]}{1 - \omega} \right), & \text{если } \omega \neq 1 \\ \ln \left[ 1 + \tilde{\beta} \ln \left( \frac{z}{z_r} \right) \right] & \omega = 1 \end{cases}. \quad (6.44)$$

Если  $z_r = z_0$ ,  $u_r = 0$  и  $\tilde{\beta} = 0$ , то решение (6.44) совпадает с рассмотренным ранее логарифмическим профилем. Эффект частиц определяется дополнительным логарифмическим слагаемым в формуле (6.44). Поскольку  $\tilde{\beta} > 0$  и  $\omega > 0$ , то при одном и том же значении динамической скорости  $u_*$  значение средней скорости  $\bar{u}$  должно быть больше в случае присутствия в потоке взвешенных частиц. Это означает, что коэффициент сопротивления должен быть меньше по сравнению с тем, что характеризует чистый поток.

Для того, чтобы оценить эффект взвешенных частиц количественно, можно положить  $u_* = 0.4$  м/сек в качестве типичного значения динамической скорости,  $r = 10$  мкм как характерное значение радиуса частиц и  $\varepsilon_e = 10^3$ . Используя формулу Стокса

$$w_f = \frac{2\varepsilon_e g r^2}{9\nu}, \quad (6.45)$$

можно получить  $w_f = 0.016$  м/сек и  $\omega = 0.1$ . Полагая  $z_r = 0.18$  м и  $z_0 = 10^{-4}$  м, а также считая, что на профиль ветра между  $z_0$  и  $z_r$  частицы не сильно влияют, можно получить следующую оценку: при изменении значений  $\bar{S}_r$  от  $10^{-5}$  до  $10^{-4}$ , скорость ветра на высоте 10 м возрастает на 4 – 35% по сравнению с течением без взвешенных частиц.

## Глава 7. Одномерные модели пограничных слоев атмосферы и океана

Пограничный слой атмосферы (характерного вертикального масштаба  $\sim 10^3$  м) и верхний слой океана (с типичной глубиной  $\sim 10^2$  м) в современных климатических моделях являются ключевыми элементами, с помощью которых (1) энергия солнечной радиации, поглощенная поверхностью их раздела, трансформируется (через турбулентный перенос) в энергию крупномасштабных движений в атмосфере и океане, и (2) контролируется уровень диссипации кинетической энергии всей климатической системы. При взаимодействии суши и атмосферы ее пограничный слой обеспечивает тепло-влажноперенос в системе "растительность – внутренние водоемы - снег - почва". В океанах турбулентные потоки импульса из атмосферы приводят к возникновению так называемой дрейфовой составляющей течений, которая обеспечивает существенный горизонтальный перенос энергии и импульса. Если поток плавучести на поверхности таков, что стратификация плотности в верхнем слое океана неустойчива, т.е. более тяжелая жидкость располагается над более легкой, то возникает конвекция, с помощью которой приповерхностные воды могут опускаться до больших глубин. Экспериментально установлено, что вне тропиков средняя скорость ветра меняет свое направление с высотой при переходе от приповерхностного слоя к свободной атмосфере, в которой прямое влияние подстилающей поверхности отсутствует. В то же время, потоки импульса  $\overline{u'w'}$  и  $\overline{v'w'}$  (также, как и компоненты напряжения трения  $\overline{\rho u'w'}$  и  $\overline{\rho v'w'}$ ) убывают с высотой, становясь пренебрежимо малыми на больших высотах. Аналогичная картина имеет место и в верхнем слое океана.

### 7.1. Уравнения Экмана

Предполагая, что подстилающая поверхность статистически горизонтально однородна, и пренебрегая эффектами молекулярной вязкости и плавучести, уравнения среднего движения в пограничном слое атмосферы могут быть записаны в следующем виде (здесь и далее черта сверху для обозначения первых моментов, в частности, средней скорости, опущена):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu.\end{aligned}\tag{7.1}$$

В свободной атмосфере имеет место геострофический баланс между силами градиента давления и Кориолиса, который в стационарном приближении записывается как

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = fv_g, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -fu_g,\tag{7.2}$$

где индексом  $g$  обозначены компоненты *геострофического ветра*, которые можно рассматривать как граничные условия для пограничного слоя. С учетом (7.2) и в стационарном приближении уравнения (7.1) могут быть записаны в виде

$$\frac{d\overline{u'w'}}{dz} = f(v - v_g), \quad \frac{d\overline{v'w'}}{dz} = -f(u - u_g).\tag{7.3}$$

Как видно из уравнений (7.3), импульс в пограничном слое возникает за счет агеострофических отклонений скорости ветра. Наиболее простая модель распределения ветра в пограничном слое атмосферы может быть получена в рамках  $K$ -теории (в предположении, что  $\overline{u'w'} = -Kdu_i/dz$ ). Соответствующая версия уравнений (7.3) с постоянным значением коэффициента турбулентности  $K$  получила название *уравнений Экмана* (Ekman, 1905) и в системе координат с осью  $x$ , направленной вдоль геострофического ветра, они могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} K \frac{d^2 u}{dz^2} + fv &= 0, \\ K \frac{d^2 v}{dz^2} - f(u - G) &= 0, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $G = \sqrt{u_g^2 + v_g^2}$ . Сам Экман получил эти уравнения при изучении дрейфовых течений в верхнем слое океана. Для исследования атмосферного пограничного слоя эти уравнения впервые были использованы Акербломом (Akerblom, 1908). Если ввести «комплексную» скорость  $W = u + iv$ , то уравнения (7.4) принимают вид

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - i \frac{f}{K} (W - G) = 0. \quad (7.5)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} W &= 0 \quad \text{при } z = 0, \\ W &\rightarrow G \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7.6)$$

записывается следующим образом

$$W - G = -G \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \left[ \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) - i \sin\left(\frac{z}{h_E}\right) \operatorname{sign} f \right], \quad (7.7)$$

где  $h_E = \sqrt{2K/|f|}$  - так называемый *масштаб Экмана*. При  $K = 12.5$  м<sup>2</sup>/сек и  $f = 10^{-4}$  сек<sup>-1</sup> значение  $h_E = 500$  м. Легко видеть, что величина  $\pi h_E$  есть ближайшая к поверхности высота (толщина слоя Экмана), на которой ветер в пограничном слое становится параллельным геострофическому ветру. Из формулы (7.7) следует, что «действительные» компоненты скорости ветра выражаются в виде

$$\begin{aligned} u &= G \left[ 1 - \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) \right], \\ v &= G \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \sin\left(\frac{z}{h_E}\right) \operatorname{sign} f. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Из этого решения следует, что ветер вращается с высотой, образуя так называемую спираль Экмана. Поскольку

$$\operatorname{tg} \theta = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{v}{u} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{dv/dz}{du/dz} = \operatorname{sign} f, \quad (7.9)$$

то вблизи подстилающей поверхности направление ветра совпадает с направлением вектора напряжения трения и отклоняется от геострофического ветра влево (вправо) в Северном (соответственно, в Южном) полушарии. В этой идеализированной модели угол  $\theta = 45^\circ$  и не зависит от географического положения и метеорологических условий. В реальной же атмосфере угол между геострофическим и приземным ветром может сильно меняться в зависимости от различных физических процессов. Это хорошо иллюстрирует рис. 7.1, заимствованный из книги Хргиана (1978), на котором приведен годограф скорости ветра в пограничном слое атмосферы, рассчитанный по формулам (7.8) и по данным наблюдений.

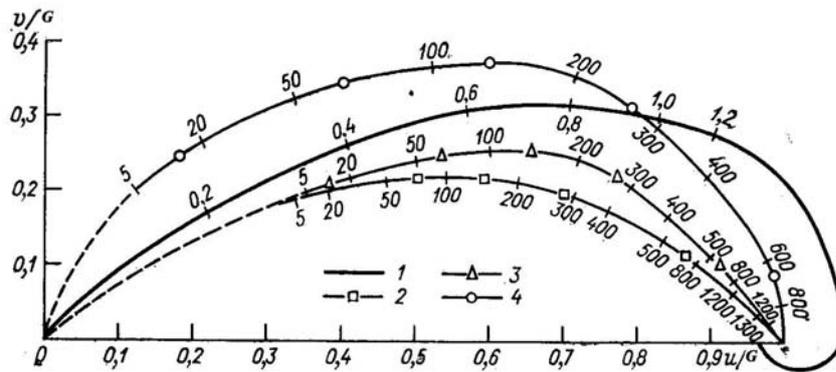


Рис. 7.1. Спираль Экмана (1) и наблюдаемые типичные ветровые спирали при неустойчивой (2), безразличной (3) и устойчивой стратификации воздуха (Зилитинкевич и др., 1967). Числа на кривых обозначают высоты (в метрах для данных наблюдений и в безразмерных единицах  $z/h_E$  для спирали Экмана).

По определению, *дрейфовые течения* в океане – это те течения, что возникают лишь под воздействием ветровых напряжений трения на поверхности океана в отсутствие сил градиента давления. В стационарном приближении и в условиях однородности по горизонтали уравнения Экмана принимают следующий вид

$$\begin{aligned} K \frac{d^2 u}{dz^2} + fv &= 0, \\ K \frac{d^2 v}{dz^2} - fu &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

В рассматриваемом случае ось  $x$  удобно направить вдоль вектора поверхностного напряжения трения ветра. Предполагая, что на глубинах дрейфовое течение затухает, а на поверхности раздела «атмосфера – океан» напряжения трения непрерывны

$$\rho_a \overline{u'_i w'} \Big|_a = \rho_w \overline{u'_i w'} \Big|_w,$$

где индексами  $a$  и  $w$  обозначены величины, относящиеся к атмосфере и океану, соответственно, граничные условия для уравнений (7.10) могут быть записаны в следующем виде:

$$K \frac{du}{dz} = \varepsilon_e u_*^2, \quad K \frac{dv}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (7.11)$$

$$u \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,$$

где  $u_*$  - динамическая скорость в воздухе, а  $\varepsilon_e = \rho_a / \rho_w$ . Соответствующее этим граничным условиям решение уравнений Экмана записывается следующим образом:

$$u = \frac{\varepsilon_e u_*^2}{\sqrt{Kf}} \exp\left(\frac{z}{h_E}\right) \cos\left(\frac{z}{h_E} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (7.12)$$

$$v = \frac{\varepsilon_e u_*^2}{\sqrt{Kf}} \exp\left(\frac{z}{h_E}\right) \sin\left(\frac{z}{h_E} - \frac{\pi}{4}\right) \text{sign } f,$$

где, как и для атмосферы, величина  $h_E = \sqrt{2K/|f|}$ , но рассчитываемая по типичным для океана значениям  $K$  (для  $K = 12.5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/сек и  $f = 10^{-4}$  сек<sup>-1</sup> величина  $h_E = 5$  м).

Как видно из (7.12), течение на поверхности океана в Северном (соответственно, в Южном) полушарии отклоняется на 45° вправо (соответственно, влево) по отношению к приповерхностному напряжению трения и, таким образом, оказывается параллельным геострофическому ветру. Используя для оценки  $u_*$  соотношение  $u_*^2 = C_d U_a^2$ , где  $C_d$  - коэффициент сопротивления и  $U_a$  - скорость ветра, например, на высоте 10 м, можно вычислить скорость течения  $U_o$  на поверхности океана:

$$U_o = \frac{\varepsilon_e C_d U_a^2}{\sqrt{Kf}}. \quad (7.13)$$

Полагая  $C_d = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_e = 10^{-3}$ ,  $U_a = 10$  м/сек и  $Kf = 9 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/сек<sup>2</sup>, легко вычислить, что  $U_o = 1/3$  м/сек. Поскольку  $U_a \ll G$ , то это означает, скорость дрейфового течения на поверхности океана примерно в 30 раз меньше, чем скорость геострофического ветра. Поскольку

$$\text{tg } \theta = \frac{v}{u} = \text{tg}\left(\frac{z}{h_E} - \frac{\pi}{4}\right) \text{sign } f$$

и  $z \leq 0$ , то вращение с глубиной дрейфового течения в Северном (соответственно, в Южном) полушарии происходит вправо (соответственно, влево) по отношению к направлению течения на поверхности.

## 7.2. Уравнения ветра склонов

Другим предельно идеализированным случаем атмосферных движений является так называемый *ветер склонов*, формирующийся в покоящейся атмосфере под воздействием баланса турбулентных и Архимедовых сил (Гутман, 1969). Предполагается, что крутизна склона достаточно велика (составляет величину нескольких градусов), а температура его поверхности отличается от температуры свободной атмосферы для той же высоты, но мало изменяется вдоль склона. Система уравнений, описывающих ветер склонов, может

быть получена путем упрощения уравнений Рейнольдса-Буссинеска с использованием замыкания в рамках  $K$ -теории с постоянными коэффициентами турбулентности и в предположении, что горизонтальные масштабы рассматриваемого явления значительно превосходят вертикальный масштаб (вертикальные скорости много меньше горизонтальных).

Целесообразно воспользоваться ортогональной криволинейной системой координат  $(x, y, z)$ , поместив ее начало где-нибудь на поверхности склона и направив ось  $x$  вдоль направляющей, ось  $y$  - вдоль образующей, а ось  $z$  - по нормали вверх (рис. 7.2). Для простоты предполагается, что рельеф имеет цилиндрическую форму (угол  $\beta = \text{const}$ ), его горизонтальные масштабы намного превосходят вертикальные, а крутизна  $\alpha(x)$  изменяется плавно.

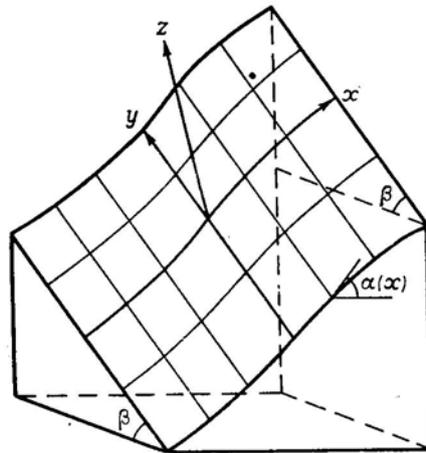


Рис. 7.2. Криволинейная система координат

В соответствии с определением ветра склонов полагается, что отклонение  $\vartheta$  температуры поверхности склона (и, соответственно, плавучесть  $b = \lambda \vartheta$ , где  $\lambda = g/T_0$ ) всюду одно и то же. Тогда все характеристики рассматриваемого движения не будут зависеть от поперечной координаты  $y$ , и уравнения ветра склонов могут быть записаны в криволинейной системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \pi}{\partial x} + \lambda \vartheta \sin \alpha + fv + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \lambda \vartheta \sin \beta - fu + K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} &= \lambda \vartheta \cos \alpha \cos \beta, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + S(u \sin \alpha + v \sin \beta + w \cos \alpha \cos \beta) &= K \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

К особенностям данной системы следует отнести следующее: 1) здесь  $u, v, w$  - составляющие скорости ветра вдоль криволинейных координат  $x, y, z$ ; 2) в уравнениях присутствуют слагаемые, явно учитывающие силы Архимеда; 3) третье уравнение

движения записано в форме уравнения квазистатики, описывающего приближенный баланс между силами давления и тяжести; 4) в уравнении для плавучести, представленного в форме уравнения теплопроводности, присутствуют слагаемые, описывающие перенос тепла, связанный со стратификацией  $S$  невозмущенной атмосферы.

В качестве краевых условий для уравнений (7.14) принимается «прилипание воздуха» на подстилающей поверхности

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (7.15)$$

задается температура склона

$$\mathcal{G} = \theta(t) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (7.16)$$

где  $\theta(t)$  предполагается известной функцией времени, и считается, что возмущения всех зависимых переменных затухают с удалением от поверхности склона:

$$u = v = \mathcal{G} = \pi = 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (7.17)$$

Специфика ветра склонов позволяет еще более упростить уравнения (7.14). Пусть  $\alpha_0, S_0$  и  $\theta_0$  - характерные значения соответствующих величин, а  $\tau$  - характерное время процесса. Вводя безразмерные переменные (Гутман, 1969)

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{\theta_0 / S_0 \sin \alpha_0}, & \tilde{z} &= \frac{z}{\sqrt[4]{K^2 / \lambda S_0 \sin^2 \alpha_0}}, & \tilde{t} &= t / \tau, \\ \tilde{u} &= \frac{u}{\theta_0 \sqrt{\lambda / S_0}}, & \tilde{v} &= \frac{v}{\theta_0 \sqrt{\lambda \sin \beta / S_0 \sin \alpha_0}}, & \tilde{w} &= \frac{w}{\sqrt[4]{\lambda S_0 K^2 \sin^2 \alpha_0}}, \\ \tilde{\mathcal{G}} &= \mathcal{G} / \theta_0, & \tilde{\pi} &= \frac{\pi}{\lambda \theta_0 \sqrt[4]{K^2 / \lambda S_0 \sin^2 \alpha_0}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

и полагая, например,

$$\begin{aligned} \lambda &= 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 / \text{сек град}, & S_0 &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ град/м}, \\ \theta_0 &= 5^0, & \alpha_0 &= 10^0, & \beta &= 2^0, & K &= 5 \text{ м}^2 / \text{сек}, \end{aligned}$$

можно найти  $\tilde{x} \approx x / 10$  км,  $\tilde{z} \approx z / 50$  м,  $\tilde{u} \approx u / 10$  м/сек,  $\tilde{v} \approx v / 2$  м/сек и  $\tilde{w} \approx w / 10$  см/сек. Рассчитанные таким образом характерные величины соответствуют данным наблюдений. Подстановка соотношений (7.18) в формулы (7.14) приводит к следующей безразмерной системе (для простоты записи волна над безразмерными переменными опущена):

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -m \frac{\partial \pi}{\partial x} + \mathcal{G} + qrv + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\
\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \mathcal{G} - qu + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial \pi}{\partial z} &= \mathcal{G}, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
\varepsilon \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + w \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} + u + r^2 v + mw &= \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2},
\end{aligned} \tag{7.19}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{\tau \sqrt{\lambda S_0 \sin \alpha_0}}, & m &= \frac{\cos \alpha_0 \cos \beta S_0}{\theta_0} \sqrt[4]{\frac{K^2}{\lambda S_0 \sin^2 \alpha_0}}, \\
q &= \frac{f}{\sqrt{\lambda S_0 \sin \alpha_0}}, & r &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha_0}.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Величины  $\varepsilon$ ,  $m$ ,  $q$  и  $r$  являются безразмерными параметрами, характеризующими влияние различных факторов на изучаемый процесс.

Параметр  $\varepsilon$  «ответственен» за степень стационарности процесса. Наблюдения показывают, что ветры склонов имеют ярко выраженный суточный ход, так что можно положить  $\tau = 12$  час. Если наклон поверхности Земли мал ( $\alpha_0 \approx 1'$ ), то  $\varepsilon = 1$  и движение будет существенно нестационарным. При  $\alpha_0 = 10^0$  параметр  $\varepsilon \approx 10^{-2}$  и можно сделать вывод, что над более или менее крутыми горами явление ветра склонов – процесс квазистационарный, что подтверждается данными наблюдений (Хргиан, 1947), согласно которым горный ветер возникает на всех высотах почти одновременно. Параметр  $m$  характеризует влияние горизонтального градиента давления и его значение порядка  $10^{-2}$ , так что при моделировании ветра склонов можно, в первом приближении, пренебречь градиентом давления по сравнению с силой Архимеда, воздействие которой описывается в уравнениях (7.14) слагаемыми  $\lambda \mathcal{G} \sin \alpha$  и  $\lambda \mathcal{G} \sin \beta$ . Вследствие малости параметра  $m$  можно пренебречь также слагаемым  $S w \cos \alpha \cos \beta$  в уравнении для температуры. Влияние силы Кориолиса обусловлено безразмерным параметром  $q$ , который при  $f = 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$  и выписанных выше значениях  $S_0$  и  $\alpha_0$  имеет величину  $\approx 10^{-2}$ . Следовательно, при ветре склонов сила Кориолиса никакой существенной роли не играет. Наконец, параметр  $r$ , величина которого зависит от соотношения между наклоном долины  $\beta$  и крутизной  $\alpha_0$  окаймляющих эту долину гор. Если  $n \approx 1$ , то скорости  $u$  и  $v$  будут одного порядка. В действительности, как правило,  $n < 1$  и при  $n \leq 10^{-1}$  характерное значение составляющей скорости вдоль оси  $y$  будет настолько малым, что можно просто положить  $v = 0$ .

После всех упрощений ( $m = q = r = 0$ ) система уравнений ветра склонов может быть записана в размерной форме следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \lambda g \sin \alpha(x) + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \lambda g \sin \beta + K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial \pi}{\partial z} &= \lambda g \cos \alpha(x) \cos \beta, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + w \frac{\partial g}{\partial z} + S u \sin \alpha(x) &= K \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{7.21}$$

В случае, когда склон представляет собой бесконечную плоскость ( $\alpha = \text{const}$ ), все неизвестные величины перестают зависеть от  $x$ , система (7.21) становится линейной и принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda g \sin \alpha + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial g}{\partial t} &= -S u \sin \alpha + K \frac{\partial^2 g}{\partial z^2},
\end{aligned} \tag{7.22}$$

где без ограничения общности задачи положено  $S = \text{const}$ ,  $\beta = 0$  и  $v \equiv 0$ . Уравнение неразрывности с учетом граничного условия (7.15) дает  $w \equiv 0$ . Умножив первое из уравнений (7.22) на  $u$ , а второе – на  $\lambda g / S$ , можно получить следующие уравнения для кинетической и потенциальной энергии

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \frac{u^2}{2} &= \lambda g u \sin \alpha + u K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \frac{\lambda g^2}{2S} &= -\lambda g u \sin \alpha + \frac{\lambda g}{S} K \frac{\partial^2 g}{\partial z^2},
\end{aligned} \tag{7.23}$$

первое слагаемое в правой части которых описывает взаимные переходы между двумя этими видами энергии.

Стационарное решение системы (7.22) с соответствующими граничными условиями (7.15) – (7.17) и  $S > 0$  было получено Прандтлем (1949)

$$u = \theta_0 \sqrt{\lambda / S} e^{-z/d} \sin(z/d), \quad g = \theta_0 e^{-z/d} \cos(z/d), \tag{7.24}$$

где  $d = \sqrt[4]{4K^2 / \lambda S \sin^2 \alpha}$ . Как видно из этого решения, дневной ветер ( $\theta_0 > 0$ ) направлен вверх по склону ( $u > 0$ ), а ночной ( $\theta_0 < 0$ ) – вниз по склону ( $u < 0$ ), причем максимум скорости достигается на высоте  $z = \pi d / 4$  и его значение не зависит от крутизны склона  $\alpha$ . Физическое объяснение этому состоит в том, что хотя подъем воздуха вдоль более крутого склона затруднен, но и сила Архимеда при этом оказывается больше. Толщина области, занятой склоновым течением, характеризуемая параметром  $d$  обратным образом зависит от крутизны склона: при ее увеличении она уменьшается, а при уменьшении растет. Для иллюстрации на рис.7.3 представлены рассчитанные по формулам (7.24)

профили  $u$  и  $\vartheta$  при следующих значениях параметров:  $\theta_0 = 5^\circ$ ,  $S = 3 \cdot 10^{-3}$  град/м,  $K = 5 \text{ м}^2/\text{сек}$  и  $\alpha = 15^\circ$  (Гутман, 1969). Тонкой чертой схематически показаны изолинии потенциальной температуры  $\theta = \vartheta + Sz'$ , пунктиром – их положение в невозмущенном состоянии ( $\theta \equiv Sz'$ ), где ось  $z'$  - направлена вверх по нормали к основанию рельефа.

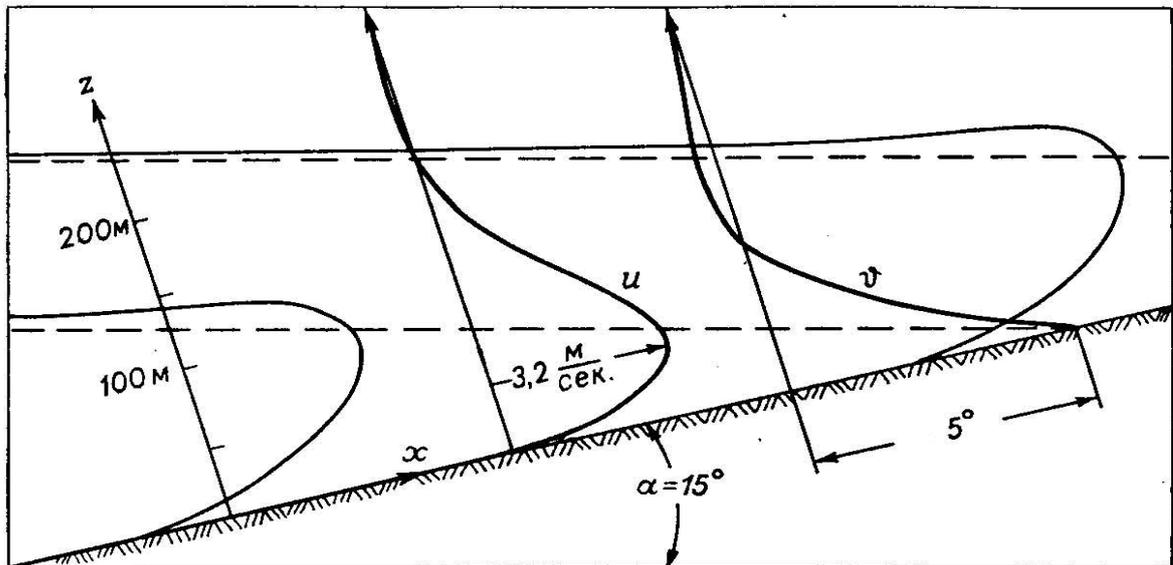


Рис. 7.3. Профили  $u$  и  $\vartheta$ , а также изолинии потенциальной температуры  $\theta = \vartheta + Sz'$  при ветре склонов.

### 7.3. Коэффициент турбулентности

Предположение о постоянстве коэффициента турбулентности на практике почти никогда не выполняется. Так например, согласно эмпирическим данным в пограничном слое атмосферы при устойчивой термической стратификации коэффициент  $K$  с ростом высоты  $z$  сначала возрастает почти линейно, а затем скорость роста замедляется и начиная с некоторых  $z$  турбулентная вязкость убывает до пренебрежимо малых значений. В связи с этим разными исследователями был предложен ряд формул для  $K(z)$ , каждой из которых отвечает свой вариант полуэмпирической теории, позволяющей рассчитать изменения скорости с высотой, эволюцию температурного профиля или перенос примеси. Такой подход имеет в настоящее время скорее исторический интерес и, по-видимому, полностью исчерпан в приложении к решению практических задач.

Были разработаны и другие теории, в основе которых лежит понятие *пути перемешивания*, введенное Прандтлем (Prandtl, 1925) по аналогии с длиной свободного пробега молекул в кинетической теории газов. Путь перемешивания – это тот путь, который проходит турбулентный элемент жидкости, прежде чем он перемешивается с другими элементами и передаст им свой импульс. Прандтль представил турбулентный поток импульса в виде

$$\bar{\tau} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad (7.25)$$

где  $l$  - длина пути перемешивания (или, как часто говорят, *интегральный масштаб*

турбулентности) и  $\bar{u} = (u, v)$ . Коэффициент турбулентной вязкости можно теперь представить в виде

$$K = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|, \quad (7.26)$$

где масштаб  $l$  зависит, вообще говоря, от координат и времени. Поскольку в течении около бесконечной плоской стенки, характеризуемым постоянным значением  $\tau$ , вне вязкого подслоя не существует никакого масштаба длины, то величина  $l$  должна быть пропорциональна расстоянию  $z$  до стенки. Полагая  $l = \kappa z$  и  $\tau = \rho u_*^2 = \text{const}$ , легко найти, что  $\partial u / \partial z = u_* / \kappa z$ , т.е. логарифмический закон для профиля скорости. Впоследствии формула (7.26) была обобщена за счет учета эффектов стратификации (см. Монин и Яглом, 1965):

$$K = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right| F(\text{Ri}), \quad (7.27)$$

где  $F$  - безразмерная функция, зависящая от числа Ричардсона  $\text{Ri}$ . Примером явной зависимости масштаба  $l$  от высоты  $z$  является формула Блэкадара (Blackadar, 1962):

$$l = \frac{\kappa z}{1 + \kappa z / l_\infty}, \quad (7.28)$$

где  $l_\infty$  - некоторая функция внешних параметров. Наконец, для расчета коэффициентов  $K_a$  часто используется уравнение баланса кинетической энергии турбулентности  $E$ , например, в виде (Монин и Яглом, 1965)

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \alpha_E \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial E}{\partial z} + K \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \alpha_\theta \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \varepsilon, \quad (7.29)$$

где  $\theta = T(p_0 / p)^{R/c_p}$  - потенциальная температура и  $\lambda = g / T_0$  - параметр плавучести, а также считается, что

$$K = l \sqrt{E}. \quad (7.30)$$

Вместо масштаба  $l$  иногда используют скорость диссипации  $\varepsilon$ , так что

$$K_a = \alpha'_a E^2 / \varepsilon, \quad (7.31)$$

но при этом приходится дополнительно привлекать уравнение для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности, например, в следующей форме (Aupoix et al., 1989, Лыкосов, 1992):

$$C_1 \frac{E}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha_\varepsilon C_1 \frac{E}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial E}{\partial z} + K \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \alpha_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \varepsilon, \quad (7.32)$$

где

$$C_1 = C^{-1} \left[ 1 + 0.69 \frac{2-C}{\sqrt{\text{Re}_\varepsilon}} \right], \quad \text{Re}_\varepsilon = \frac{(2E/3)^2}{\varepsilon \nu}, \quad (7.33)$$

а  $C$  - некоторая константа, численное значение которой (например,  $C = 1.9$ ) зависит от формы спектра кинетической энергии турбулентности.

## Глава 8. Бризовые циркуляции

*Локальными* называют ветры, возникающие за счет местных причин (термической неоднородности и искривленности подстилающей поверхности) и имеющие суточный период во временном изменении своих характеристик. Локальные ветры не связаны с движениями в свободной атмосфере и потому наиболее отчетливо проявляются в природе именно тогда, когда градиенты крупномасштабного поля давления слабы. Рассмотренный в предыдущей главе *ветер склонов*, возникающий над искривленной термически однородной подстилающей поверхностью, является предельным случаем локальных ветров. Другой предельный случай представляет *бриз*, формирующийся над термически неоднородной горизонтальной подстилающей поверхностью (в частности, морской и озерный бризы). В природе часто наблюдаются смешанные типы локальных ветров, обусловленные совместным действием орографических и термических причин на фоне внешнего барического поля.

### 8.1. О механизме бриза

Причиной возникновения (для определенности, морского) бриза является различие в температурах поверхности моря и суши. Благодаря турбулентному перемешиванию тепло от подстилающей поверхности поступает в прилегающие слои атмосферы и формирует горизонтальные градиенты температуры и давления, в результате чего на побережье появляется ветер, определяющий бризовую циркуляцию - направлением (в зависимости от знака разности температур «море – суша») либо на сушу, либо на море. Как видно из этого качественного объяснения, турбулентность играет определяющую роль в механизме бриза. Согласно наблюдениям, бризы распространяются на расстояния порядка 100 км по горизонтали и на 1 – 2 км по вертикали. Поэтому для рассмотрения механизма бризовой циркуляции можно воспользоваться упрощениями Буссинеска и гидростатическим приближением для сухой атмосферы (Гутман, 1969). Пусть в невозмущенном состоянии атмосфера покоится, так что соответствующую систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \pi}{\partial x} + fv + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial \pi}{\partial y} - fu + K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ -\frac{\partial \pi}{\partial z} + \lambda \mathcal{G} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{d\mathcal{G}}{dt} + S_w &= K \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2},\end{aligned}\tag{8.1}$$

где по-прежнему  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$ ;  $u, v, w$  - компоненты вектора  $\vec{u}$  скорости ветра в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ , причем ось  $z$  направлена вертикально вверх;  $\mathcal{G}$  - отклонение потенциальной температуры от ее распределения  $\theta(z)$  в покоящейся

атмосфере, при этом  $\frac{d\theta}{dz} = S$ ;  $\pi$  - нормированное отклонение давления;  $f$  - параметр Кориолиса;  $\lambda = g/\theta$  - параметр плавучести;  $K$  - коэффициент турбулентности.

Порядок системы (8.1) требует постановки восьми граничных условий по  $z$ . На подстилающей поверхности три из них связаны с прилипанием воздуха:

$$u = v = w = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (8.2)$$

а в качестве четвертого задается возмущение температуры в виде известной функции горизонтальных координат и времени:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_s(x, y, t) \quad \text{при } z = 0, t > 0. \quad (8.3)$$

Поскольку влияние подстилающей поверхности должно затухать с высотой, то естественно потребовать, чтобы

$$(u, v, \mathcal{G}, \pi) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (8.4)$$

Краевые условия по горизонтали также определяются локальным характером рассматриваемого явления. Если

$$\mathcal{G}_s(x, y, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } (x, y) \rightarrow \pm\infty, \quad (8.5)$$

то необходимо потребовать, чтобы

$$(u, v, \mathcal{G}) \rightarrow 0 \quad \text{при } (x, y) \rightarrow \pm\infty. \quad (8.6)$$

В случае симметричного (например, по одному из горизонтальных направлений, скажем,  $x$ ) распределения температуры подстилающей поверхности

$$\mathcal{G}_s(x, y, t) = \mathcal{G}_s(-x, y, t), \quad \partial \mathcal{G}_s(x, y, t) / \partial x \Big|_{x=0} = 0 \quad (8.7)$$

все явление будет симметричным по  $x$  и можно использовать условия

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0. \quad (8.8)$$

Если предположить, что в начальный момент атмосфера была неподвижна, то начальные условия можно сформулировать следующим образом:

$$u = v = \mathcal{G} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (8.9)$$

Следуя Гутману (1969), можно предельно упростить постановку задачи, поместив начало координат в урезе берега и предположив, что берег прямой и бесконечно длинный. Пусть ось  $x$  направлена по нормали к берегу, а ось  $y$  - вдоль берега. Если возмущение

температуры не зависит от  $y$ , а сила Кориолиса не учитывается, то  $f = v = 0$  и система (8.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \pi}{\partial x} + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + w \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} &= -Sw + K \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} &= \lambda \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Наиболее характерным фактором в механизме бриза является существование периодически меняющейся в течение суток разности температур «море – суша». Целесообразно рассмотреть самый простой случай – линейное изменение по горизонтали функции  $\mathcal{G}_0$  при периодическом ходе во времени:

$$\mathcal{G}_s(x, t) = (a_0 + a_1 x) \sin \omega t, \quad (8.11)$$

где  $\omega$  - угловая скорость вращения Земли;  $a_0$  и  $a_1$  - заданные константы. Величину  $a_1$  можно интерпретировать как некоторый характерный градиент температуры подстилающей поверхности. Хотя распределение (8.11) не удовлетворяет условию «локальности» (8.5), можно, тем не менее, надеяться, что основные черты явления (пусть и в некоторой достаточно малой области вблизи берега) будут правдоподобно воспроизведены с помощью сформулированной упрощенной модели.

Решение поставленной задачи целесообразно искать в виде

$$\begin{aligned} u &= u(z, t), \\ \mathcal{G} &= \mathcal{G}_0(z, t) + x \mathcal{G}_1(z, t), \\ \pi &= \pi_0(z, t) + x \pi_1(z, t). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Поскольку физический смысл это решение может иметь лишь при небольших по модулю  $x$ , то краевые условия (8.6) нет необходимости учитывать. Так как  $u$  не зависит от  $x$ , то в силу уравнения неразрывности и краевого условия (8.2) имеет место следующее соотношение

$$w \equiv 0. \quad (8.13)$$

Подстановка (8.12) и (8.13) в систему уравнений (8.10) приводит к системе, в которой неизвестные переменные не зависят от  $x$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\pi_1 + K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial t} + u \mathcal{G}_1 &= K \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial \pi_0}{\partial z} &= \lambda \mathcal{G}_0, \quad \frac{\partial \pi_1}{\partial z} = \lambda \mathcal{G}_1.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Краевые условия для этой системы принимают следующий вид:

$$u = 0, \quad \mathcal{G}_0 = a_0 \sin \omega t, \quad \mathcal{G}_1 = a_1 \sin \omega t \quad \text{при } z = 0, \tag{8.15}$$

$$(u, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \pi_0, \pi_1) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \tag{8.16}$$

Удобно ввести безразмерные величины (обозначаемые буквами с черточками) из соотношений

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{2\omega^{-1}K} \bar{z}, \quad t = \omega^{-1} \bar{t}, \\
u &= \lambda \omega^{-1} a_1 \sqrt{2\omega^{-1}K} \bar{u}, \\
\mathcal{G}_0 &= \lambda \omega^{-2} a_1^2 \sqrt{2\omega^{-1}K} \bar{\mathcal{G}}_0, \quad \mathcal{G}_1 = a_1 \bar{\mathcal{G}}_1, \\
\pi_0 &= 2\omega^{-1}K (\lambda \omega^{-1} a_1)^2 \bar{\pi}_0, \quad \pi_1 = \lambda a_1 \sqrt{2\omega^{-1}K} \bar{\pi}_1, \\
a_0 &= \lambda \omega^{-2} a_1^2 \sqrt{2\omega^{-1}K} \bar{a}_0.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

В результате уравнения (8.14) примут вид (черточки над буквами опущены)

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial z^2}, \tag{8.18}$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial z} = \mathcal{G}_1, \tag{8.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\pi_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{8.20}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial t} + u \mathcal{G}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0}{\partial z^2}, \tag{8.21}$$

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial z} = \mathcal{G}_0. \tag{8.22}$$

Из граничных условий (8.15) и (8.16) изменят свою форму лишь условия для температуры на подстилающей поверхности:

$$\mathcal{G}_1 = \sin t, \quad \mathcal{G}_0 = a_0 \sin t \quad \text{при } z = 0. \quad (8.23)$$

Выписанная цепочка уравнений отражает взаимодействия между различными физическими факторами бризовой циркуляции. Из (8.18) видно, что горизонтальный градиент температуры возникает в атмосфере в результате нагревания воздуха от подстилающей поверхности за счет турбулентного теплообмена. Уравнение (8.19) показывает, что горизонтальный градиент температуры формирует горизонтальный градиент давления, который, в свою очередь, вследствие уравнения (8.20) приводит к возникновению ветра, причем турбулентные процессы также играют важную роль. Уравнение (8.21) отражает обратное влияние, которое ветер оказывает на поле температуры: слагаемое  $u\mathcal{G}_1$  описывает перенос тепла бризом.

Решение последовательности уравнений (8.18) – (8.22) при сформулированных выше краевых условиях имеет следующий вид (Гутман, 1969):

$$\mathcal{G}_1 = e^{-z} \sin(t - z), \quad \pi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-z} \cos\left(t - z + \frac{\pi}{4}\right), \quad (8.24)$$

$$u = -ze^{-z} \cos(t - z), \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 = & a_0 e^{-z} \sin(t - z) + \frac{z}{4} e^{-2z} \cos 2(t - z) + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-2z} \cos 2\left(t - z - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{4} e^{-z\sqrt{2}} \cos 2\left(t - \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right). \end{aligned} \quad (8.26)$$

Выражение для  $\pi_0$  может быть получено интегрированием формулы (8.26) по  $z$  с учетом краевого условия (8.16), но не выписано в силу его громоздкости. Формулы (8.24) – (8.26) показывают, что структура бриза в окрестности береговой линии представляет собой распространяющиеся снизу вверх и затухающие с высотой ветровые и температурные волны. Это означает, что бриз – явление существенно нестационарное. В формуле (8.26) для  $\mathcal{G}_0$  присутствуют слагаемые, описывающие полусуточные колебания, которые накладываются на суточные, обусловленные ходом температуры подстилающей поверхности.

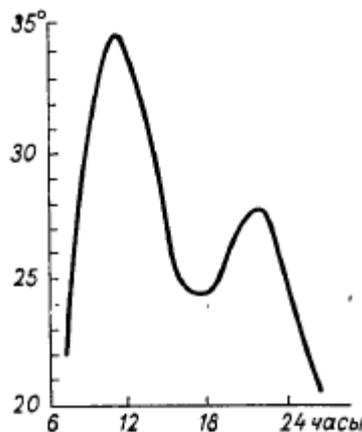


Рис. 8.1. Суточный ход температуры при бризе, рассчитанный по формуле (8.26).

На рис. 8.1 приведен суточный ход температуры на высоте  $z = 50$  м, вычисленный по формуле (8.26) при следующих значениях параметров:  $K = 5$  м<sup>2</sup>/сек,  $a_1 = 0.3$  /км,  $a_0 = 7$  °С. На рис. 8.2 изображен типичный суточный ход температуры во время бриза, построенный по данным наблюдений (Гутман, 1969), при этом пунктиром показаны вариации температуры, характерные для дней без бриза.

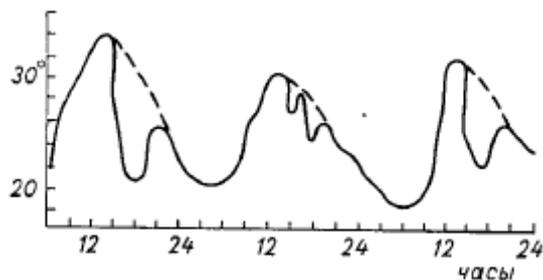


Рис. 8.2. Суточный ход температуры при бризе по данным наблюдений.

Нетрудно показать, что слагаемые, описывающие в уравнениях движения влияние силы Кориолиса, при бризе имеют тот же порядок, что и все остальные. Учет этих слагаемых приводит к тому, что направление бризового ветра может сильно отклоняться от направления нормали к берегу. В рамках рассмотренной модели решение задачи может быть получено и при наличии силы Кориолиса. На рис. 8.3, заимствованном из книги Гутмана (1969), приведены результаты расчета суточного хода направления ветра для широты  $10^\circ$  в виде графика временной зависимости угла  $\alpha$  отклонения ветра от нормали к берегу. Стрелочками показано направление скорости ветра относительно берега для нескольких моментов времени.

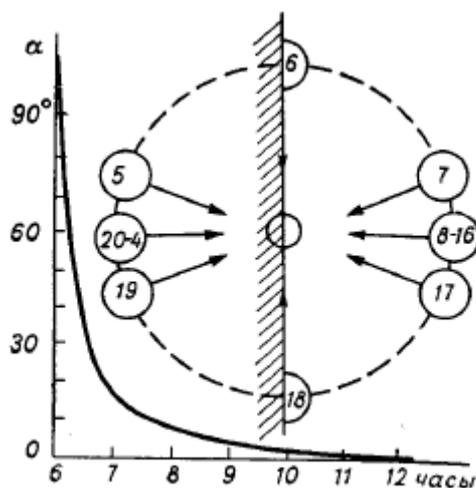


Рис. 8.3. Суточный ход направления ветра при бризе.

## 8.2. Бриз в устойчиво стратифицированной атмосфере

В предыдущем разделе приведено точное аналитическое решение предельно упрощенной задачи, позволившее тем не менее сформулировать ряд физических выводов относительно структуры бризовой циркуляции. Вместе с тем, в этом решении полностью отсутствуют эффекты *наложенной* (присущей фоновому состоянию атмосферы) *стратификации* температуры  $S$ , связанные со слагаемым  $Sw$  во втором из уравнений (8.10). Легко

видеть, что порядок этой системы уравнений по  $z$  не позволяет в дополнение к граничным условиям (8.2) – (8.4) задавать условие для вертикальной компоненты скорости  $w$  при  $z \rightarrow \infty$ . Если атмосфера в фоновом состоянии стратифицирована безразлично, т.е.  $S = 0$ , то на асимптотическое поведение  $w$  при  $z \rightarrow \infty$  не накладывается никаких ограничений. Однако, если  $S > 0$ , то, в силу граничного условия  $\mathcal{G} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  и вида уравнения для  $\mathcal{G}$ , должно выполняться

$$w \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty. \quad (8.27)$$

Необходимо подчеркнуть, что (8.27), не являясь краевым условием, должно выполняться само собой. Интегрируя уравнение неразрывности по  $z$  от 0 до  $\infty$  и используя соответствующие краевые условия из (8.2) и (8.8), а также (8.27), можно получить, что

$$\int_0^{\infty} u dz = 0. \quad (8.28)$$

Это означает, что наличие в уравнении для температуры, вообще говоря, не малого слагаемого  $S w$  приводит к тому, что в устойчиво стратифицированной атмосфере над бризом должен существовать заметный компенсационный поток (антибриз), хорошо известный из наблюдений в природе (Бурман, 1969). Работа (Шапошникова и др., 1968) была, по-видимому, первой, в которой построена численная модель бризовой циркуляции, обладающей указанным свойством (см. рис. 8.4).

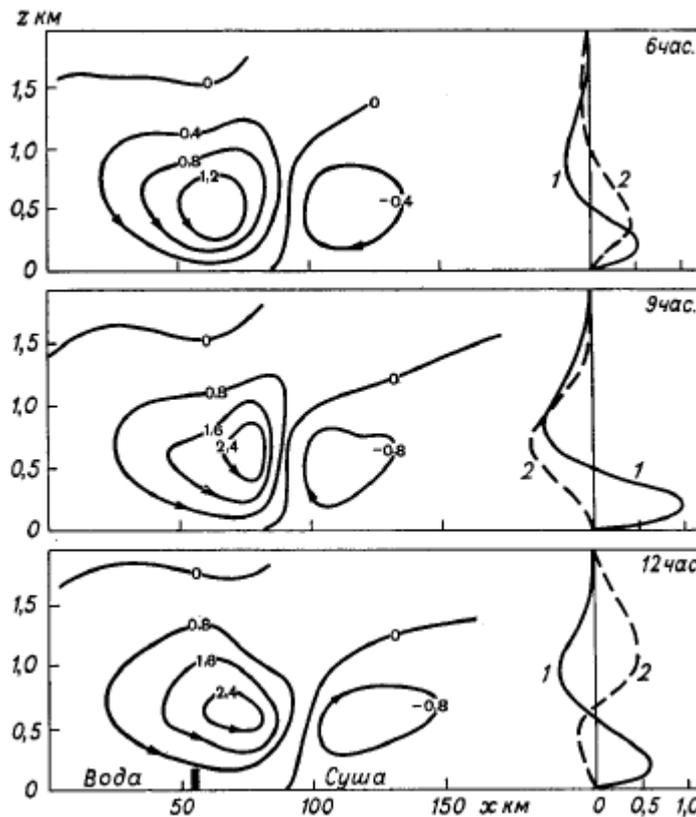


Рис. 8.4. Рассчитанные линии тока  $\psi = \int_0^z u dz'$  и профили  $u$  (кривая 1) и  $w$  (кривая 2) при бризе для трех моментов времени.

Следуя Сперанской (1971), целесообразно провести линейризацию уравнений (8.10) в предположении, что

$$u = U + u', \quad w = w' \quad (8.29)$$

и  $u' \ll U$ ,  $w \ll U$ . Соответствующая система уравнений (в стационарном приближении) будет иметь вид

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial \pi}{\partial x} + K \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \quad (8.30)$$

$$U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -Sw + K \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}, \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = \lambda \vartheta. \quad (8.33)$$

В качестве нижних краевых условий для данной системы уравнений целесообразно использовать следующие:

$$w = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = f(x) \quad \text{при } z = 0, \quad (8.34)$$

где  $f(x)$  - заданная функция. Отказ от условия прилипания для горизонтальной скорости обусловлен тем, что при его использовании ( $u' = -U$  при  $z = 0$ ) нарушается исходное предположение о малости возмущений скорости.

Интегрирование уравнения неразрывности (8.32) в пределах от  $z$  до  $\infty$  в предположении справедливости условия (8.27) приводит к соотношению

$$w = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\infty} u' dz'. \quad (8.35)$$

Аналогичным образом можно получить (с учетом соответствующего граничного условия), что

$$\pi = -\lambda \int_z^{\infty} \vartheta dz'. \quad (8.36)$$

В результате уравнения (8.30) и (8.31) могут быть переписаны следующим образом:

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\infty} \vartheta dz' + K \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \quad (8.37)$$

$$U \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = -S \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\infty} u' dz' + K \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2}. \quad (8.38)$$

Если теперь умножить уравнение (8.38) на  $i\sqrt{\lambda/S}$  и сложить с уравнением (8.37), а затем получившееся выражение продифференцировать по  $z$ , то в результате получится уравнение

$$U \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = i\sqrt{\lambda S} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3}, \quad (8.39)$$

где

$$\varphi = \int_z^{\infty} \left( u' + i\sqrt{\frac{\lambda}{S}} \mathcal{G} \right) dz'. \quad (8.40)$$

Величины  $u'$ ,  $\mathcal{G}$  и  $w$  следующим образом выражаются через функцию  $\varphi$ :

$$u' = -\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad \mathcal{G} = -\sqrt{\frac{S}{\lambda}} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad w = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Краевые условия для уравнения (8.39), соответствующие исходным условиям (8.34) и асимптотике при  $z \rightarrow \infty$ , переписываются в виде

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -i\sqrt{\frac{\lambda}{S}} f(x) \quad \text{при } z = 0, \quad (8.41)$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Пусть  $f(x) = f_0 \sin \pi x / L$ , где  $f_0$  и  $L$  - заданные параметры. Поскольку

$$\sin \frac{\pi}{L} x = \frac{1}{2i} \left( e^{i\frac{\pi}{L}x} - e^{-i\frac{\pi}{L}x} \right) = \frac{1}{2i} \sum_{n=-1,1} ne^{i\frac{\pi}{L}nx}, \quad (8.42)$$

то и решение для  $\varphi$  можно искать в аналогичном виде:

$$\varphi = \sum_{n=-1,1} \varphi_n(z) e^{i\frac{\pi}{L}nx},$$

в результате чего задача сводится к отысканию решения следующей системы двух уравнений:

$$i\frac{\pi}{L} nU \frac{d\varphi_n}{dz} = -\frac{\pi}{L} n\sqrt{\lambda S} \varphi_n + K \frac{d^3 \varphi_n}{dz^3}, \quad (n = -1, 1). \quad (8.43)$$

Если ввести безразмерные величины

$$\zeta = \frac{z}{h}, \quad \kappa = \frac{U}{h\sqrt{\lambda S}}, \quad (8.44)$$

где

$$h = \sqrt[3]{\frac{KL}{\pi\sqrt{\lambda S}}}, \quad (8.45)$$

то уравнения (8.43) можно записать в следующем виде:

$$\varphi_n''' - n(i\kappa\varphi_n' + \varphi_n) = 0, \quad n = (-1, 1), \quad (8.46)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по  $\zeta$ . Краевые условия для уравнений (8.46) принимают следующую форму:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \bar{\varphi}_{-1} = 0, \quad \varphi_n'' = -n\varphi_0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, \\ \varphi_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (n = -1, 1), \end{aligned} \quad (8.47)$$

где  $\varphi_0 = h^2 \sqrt{\lambda/S} f_0 / 2$ , а черта сверху означает, что берется комплексное сопряжение.

Принимая в качестве характерных значений

$$K = 30 \text{ м}^2/\text{сек}, \quad L = 10^5 \text{ м}, \quad \lambda = 1/30 \text{ м/сек}^2\text{град}, \quad S = 0.003 \text{ град/м}, \quad U = 10 \text{ м/сек},$$

можно получить, что  $h = 400$  м и  $\kappa = 2.5$ . Характеристическое уравнение для (8.46) записывается в виде

$$r^3 - i\kappa r - n = 0, \quad (8.48)$$

из 6 корней которого всегда можно выбрать три с отрицательной действительной частью и тем самым обеспечить необходимую асимптотику для  $u'$ ,  $\mathcal{G}$  и  $w$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Если обозначить эти корни как  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  (при этом  $r_1$  и  $r_2$  соответствуют значению  $n = 1$ , а  $r_3$  - значению  $n = -1$ ), то решение поставленной задачи может быть записано в виде

$$\varphi = \frac{1}{2} h^2 f_0 \sqrt{\frac{\lambda}{S}} \left[ (C_1 e^{r_1 \zeta} + C_2 e^{r_2 \zeta}) e^{i \frac{\pi}{L} x} + C_3 e^{r_3 \zeta - i \frac{\pi}{L} x} \right], \quad (8.49)$$

где  $C_3 = r_3^{-2}$ , а  $C_1$  и  $C_2$  удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 = -\bar{C}_3, \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = -1. \end{aligned} \quad (8.50)$$

При  $\kappa \ll 1$  и  $\kappa \ll 1$  можно получить аналитический вид  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$  с помощью разложения в ряд по степеням некоторого малого параметра  $\varepsilon$ . При  $\kappa \ll 1$  таким малым параметром является сама величина  $\kappa$  и рассматриваемый случай соответствует слабому внешнему потоку или полному его отсутствию (чисто бризовый процесс). Искомые корни уравнения (8.48) выражаются в виде

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \kappa + \dots \pm i \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \mp \frac{\kappa}{6} + \dots \right), \\ r_3 &= -1 - \frac{1}{3^5} \kappa^4 + \dots + i \left( \frac{\kappa}{3} + \frac{\kappa^3}{3^4} + \dots \right), \end{aligned} \quad (8.51)$$

а решение задачи (8.46) – (8.47) записывается (при  $\kappa = 0$ ) следующим образом

$$\varphi = h^2 f_0 \sqrt{\frac{\lambda}{S}} \left[ \frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon - i\pi x}{L}} - e^{-\frac{\varepsilon + i\pi x}{2L}} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\varepsilon}{L} + \frac{\pi}{3} \right) \right], \quad (8.52)$$

так что

$$\begin{aligned} u' &= h f_0 \sqrt{\frac{\lambda}{S}} \left( \frac{1}{2} e^{-\varepsilon} - e^{-\varepsilon/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon \right) \cos \frac{\pi}{L} x, \\ \vartheta &= -h f_0 \left( \frac{1}{2} e^{-\varepsilon} + e^{-\varepsilon/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon \right) \sin \frac{\pi}{L} x, \\ w &= h^2 f_0 \sqrt{\frac{\lambda}{S}} \frac{\pi}{L} \left[ e^{-\varepsilon/2} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon + \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} e^{-\varepsilon} \right] \sin \frac{\pi}{L} x. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Таким образом, при слабом внешнем ветре или при его полном отсутствии возмущения метеорологических элементов, обусловленные термическими неоднородностями подстилающей поверхности, образуют пограничный слой, близкий по толщине к экмановскому. Эти возмущения могут менять знак с высотой, демонстрируя тем самым наличие антибриза над бризовым потоком.

При  $\kappa \ll 1$  целесообразно ввести новую величину  $\bar{r} = \kappa^{-1/2} r$  и переписать уравнение (8.48) в виде

$$\bar{r}^3 - i n \bar{r} - n \varepsilon = 0, \quad (8.48')$$

где малый параметр  $\varepsilon = \kappa^{-3/2}$ . В результате корни характеристического уравнения (8.48) имеют следующее асимптотическое представление

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{\kappa^4} + \frac{3}{\kappa^{10}} + \dots + i \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{3}{\kappa^7} + \dots \right), \\ r_{2,3} &= -\sqrt{\frac{\kappa}{2}} - \frac{3}{8\sqrt{2}\kappa^{5/2}} + \dots \mp i \left( \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \pm \frac{1}{2\kappa} + \dots \right), \end{aligned} \quad (8.51)$$

а решение (8.49) приобретает вид

$$\varphi = h^2 f_0 \sqrt{\frac{\lambda}{S}} \left[ \frac{1}{\kappa} e^{-\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \zeta} \left( \sin \frac{\zeta}{2\kappa} + i \cos \frac{\zeta}{2\kappa} \right) \cos \left( \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \zeta - \frac{\pi}{L} x \right) + \frac{1}{\kappa^{5/2}} e^{-\frac{\zeta}{\kappa^4} + i \left( \frac{\zeta}{\kappa} + \frac{\pi}{L} x + \frac{3\pi}{4} \right)} \right].$$

При выделении в данном случае мнимой части  $\varphi$  можно пренебречь малым членом, пропорциональным  $\kappa^{-5/2}$  и при определении  $\mathcal{I}$  ограничиться лишь первым слагаемым.

Поскольку  $\mathcal{I} \propto \text{Im} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)$ , то с увеличением  $\kappa$  температура  $\mathcal{I}$  уменьшается

пропорционально  $\kappa^{-1/2}$ . Для оценки толщины  $h_g$  слоя, в котором происходит затухание  $\mathcal{I}$  на порядок можно использовать следующее соотношение

$$\sqrt{\frac{\kappa}{2}} \zeta = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{h_g}{h} \approx 2, \quad (8.52)$$

что приводит (при  $\kappa = 2.5$ ) к  $h_g \approx 1$  км. Формула (8.52) показывает, что толщина  $h_g$  уменьшается с ростом скорости фонового потока  $U$ .

## Глава 9. Термики, смерчи и торнадо

*Термиками* называются упорядоченные конвективные образования типа восходящих струй или всплывающих пузырей теплого воздуха (Гутман, 1969). Они возникают в результате процесса термической конвекции (подъема вверх массы теплого, менее плотного, чем окружающий, воздуха) над сушей днем или над водной поверхностью ночью и могут быть самых различных размеров - от нескольких сантиметров в поперечном сечении до нескольких сот метров и даже километров. Вертикальная скорость поднимающегося вверх теплого воздуха также может колебаться в очень широких пределах: от нескольких сантиметров в секунду до нескольких метров в секунду. Продолжительность их существования может меняться от нескольких секунд до нескольких минут. Температура воздуха в термиках на 1 - 2° превышает температуру окружающей среды, а вертикальные скорости достигают нескольких метров в секунду.

Такие структуры в ходе аэрологических измерений обнаруживаются на различных высотах вплоть до нескольких километров, причем присутствие пыли, дыма или капельно-жидкой влаги делает термики иногда видимыми. Физическую природу таких образований попытался объяснить еще в 1905 г. И.И. Касаткин (Гутман, 1969, стр. 120), который считал, что одни термики «происходят от особо сильного нагревания какой-либо части земной поверхности, другие же возникают внутри самой воздушной массы в силу неустойчивого равновесия атмосферы». В последнем случае термики называются спонтанными. Возможны и структуры промежуточного типа, когда термик, образовавшийся над наиболее нагретым участком подстилающей поверхности, в дальнейшем развивается за счет энергии неустойчивости атмосферы.

В атмосфере также часто возникают вращающиеся вокруг своей оси вихри, причем ось вращения приблизительно вертикальна. В зависимости от размеров и интенсивности такие вихри могут называться: пылевой вихрь, смерч, торнадо. Диаметр наименьшего из пылевых вихрей составляет величину порядка 1 м, а диаметр наиболее мощного торнадо может достигать значений порядка 1 км. Все перечисленные явления, включая термики, имеют общие черты: 1) вертикальные размеры значительно превосходят горизонтальные и 2) слой атмосферы, в котором они возникают, стратифицирован неустойчиво.

### 9.1. Термик в нейтрально стратифицированной атмосфере

Следуя Гутману (1969), рассмотрение теории упорядоченной конвекции целесообразно начать со случая термика, образующегося над точечным источником тепла в безразлично стратифицированной атмосфере ( $S \equiv d\theta/dz = 0$ ). Нагреваясь от источника тепла за счет турбулентной теплопроводности, воздух начинает подниматься («всплывать»), образуя теплую восходящую струю – термик. Если в невозмущенном состоянии воздух покоится, то струя будет направлена вертикально вверх и ширина ее будет мала по сравнению с длиной. Для простоты можно считать, что термик имеет осесимметричную структуру. Поскольку в данном случае вертикальные масштабы явления намного превосходят горизонтальные, то целесообразно воспользоваться упрощениями теории пограничного слоя, расположенного по вертикали (вдоль оси термика). Эти упрощения заключаются в том, что считаются малыми и потому могут быть отброшены слагаемые, описывающие вертикальное турбулентное перемешивание при сохранении членов, ответственных за радиальный турбулентный перенос. Кроме того, в процессах такого рода возмущения давления из-за своей малости не играют активной роли и ими можно пренебречь всюду, кроме уравнения для радиальной составляющей скорости. Наконец, вследствие небольших масштабов термика можно пренебречь силой Кориолиса.

Для гидродинамического описания термика можно воспользоваться следующей системой уравнений, записанных в цилиндрической системе координат  $(r, z)$ , где  $r$  - расстояние до оси термика, а ось  $z$  направлена вертикально вверх:

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \pi}{\partial r} + K \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial ur}{\partial r} \right), \quad (9.1)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda \mathcal{G} + K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (9.2)$$

$$u \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + w \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} = K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right), \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial ur}{\partial r} + \frac{\partial wr}{\partial z} = 0. \quad (9.4)$$

Здесь  $u$  и  $w$  - радиальная и вертикальная составляющие скорости, а  $K$  - горизонтальный коэффициент турбулентности, считающийся постоянным. Уравнения (9.2) – (9.4) составляют замкнутую систему относительно неизвестных  $u, w$  и  $\mathcal{G}$ . После того как составляющие скорости будут найдены, возмущения давления могут быть определены из уравнения (9.1). В качестве краевых условий целесообразно принять условия симметрии

$$u = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad (9.5)$$

и условия локальности рассматриваемого явления

$$(w, \mathcal{G}, \pi) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (9.6)$$

Если умножить уравнение (9.3) на  $rdr$  и затем проинтегрировать получившееся выражение по  $r$  от 0 до  $\infty$  с учетом уравнения неразрывности (9.4) и краевых условий (9.5) – (9.6), то будет иметь место следующее соотношение

$$\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} w \mathcal{G} r dr = 0. \quad (9.7)$$

При выводе этого соотношения предполагалось также, что

$$r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} = ru \mathcal{G} = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (9.8)$$

Из (9.7) следует, что

$$\int_0^{\infty} w \mathcal{G} r dr = Q = \text{const}, \quad (9.9)$$

то есть, в приближении теории пограничного слоя количество тепла, переносимого термиком через любую горизонтальную поверхность, будет величиной постоянной. Величина  $Q$ , пропорциональная мощности источника тепла, считается заданным параметром рассматриваемой задачи.

Уравнение (9.4) позволяет ввести функцию тока  $\psi$  из соотношений

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (9.10)$$

Решение поставленной задачи удобно искать в форме

$$\psi = 2Kz\varphi(\xi), \quad \vartheta = \frac{Q}{Kz}\eta(\xi), \quad (9.11)$$

где  $\xi = \sqrt{\lambda Q / K^3} r^2 / 4z$ , причем  $\xi$ ,  $\varphi$  и  $\eta$  - безразмерные величины. Источник тепла помещен в начале координат, которое является в рассматриваемом случае особой точкой. Подстановка (9.10) и (9.11) в (9.2) и (9.3) приводит к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно  $\varphi(\xi)$  и  $\eta(\xi)$ :

$$(\xi\varphi'')' + \varphi\varphi'' + \eta = 0, \quad (9.12)$$

$$(\xi\eta')' + \varphi'\eta + \varphi\eta' = 0, \quad (9.13)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по  $\xi$ . Соответствующие краевые условия принимают вид

$$\sqrt{\xi}\varphi' - \frac{\varphi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\xi}\eta' = \sqrt{\xi}\varphi'' = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow 0, \quad (9.14)$$

$$\varphi' = \eta = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (9.15)$$

Интегрирование уравнения (9.13) с учетом краевых условий (9.14) и того, что величины  $\eta(0)$  и  $\varphi'(0)$ , пропорциональные значениям температуры и вертикальной скорости на оси термика, конечны по физическому смыслу задачи, приводит к уравнению

$$\varphi\eta + \xi\eta' = 0. \quad (9.16)$$

В результате подстановки  $\varphi$  из (9.16) в (9.12) и интегрирования получившегося уравнения с учетом краевых условий (9.14) возникает следующее соотношение

$$\eta = -\varphi''. \quad (9.17)$$

Систему уравнений (9.16) и (9.17) можно свести к одному уравнению

$$\xi\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0, \quad (9.18)$$

решение которого должно удовлетворять условиям

$$\varphi'(0) = 1, \quad \varphi(0) = \varphi'(\infty) = 0. \quad (9.19)$$

Первое из этих условий является следствием соотношения (9.9), а последние два соответствуют (9.14) и (9.15).

Можно легко убедиться в том, что функция

$$\varphi = \frac{3\xi}{\xi + 3} \quad (9.20)$$

удовлетворяет уравнению (9.18) и краевым условиям (9.19). Зная  $\varphi$ , из (9.17) можно получить выражение для функции  $\eta(\xi)$ .

В размерной форме решение рассмотренной задачи о термике может быть записано следующим образом

$$\begin{aligned} \psi &= Kz \frac{6\xi}{\xi + 3}, & \vartheta &= \frac{Q}{Kz} \frac{18}{(\xi + 3)^3}, \\ u &= \frac{K}{r} \frac{18\xi^2}{(\xi + 3)^2}, & w &= \sqrt{\frac{\lambda Q}{K}} \frac{9}{(\xi + 3)^2}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Из формул (9.21) видно, что затухание радиальной составляющей скорости  $u$  с удалением от оси симметрии происходит значительно медленнее, чем затухание  $w$  и  $\vartheta$ . Это означает, что пространство, в котором происходит горизонтальное движение, намного превышает область, занятую собственно термиком. Количество воздуха, которое вовлекает в себя и затем переносит вверх струя, пропорционально  $z$ :

$$\int_0^{\infty} wrdr = 2K\psi(\infty)z$$

и, таким образом, термик действует как насос, перекачивающий воздух в верхние слои атмосферы. Максимальная температура

$$\vartheta|_{r=0} = \frac{2Q}{3Kz}$$

уменьшается обратно пропорционально высоте (см. рис. 9.1, на котором схематически изображены изолинии отклонений температуры в осевой плоскости и построены профили  $\vartheta$  для двух высот).



Рис. 9.1. Изолинии и профили  $\mathcal{G}$  в осевом сечении термика (схематический чертеж).

Интегрирование уравнения (9.1) по  $r$  от 0 до  $\infty$  с использованием соотношений (9.5), (9.6) и (9.20) приводит к следующему выражению для давления на оси струи:

$$\pi|_{r=0} = -\frac{\sqrt{\lambda QK}}{2z} \int_0^{\infty} \varphi'^2 d\xi = -\frac{\sqrt{\lambda QK}}{2z},$$

означающему, что давление внутри термика меньше, чем снаружи, и эта разность изменяется обратно пропорционально высоте.

## 9.2. Спонтанный термик

В данном случае причиной существования термика является энергия вертикальной неустойчивости атмосферы и для его исследования снова можно воспользоваться системой уравнений (9.1) – (9.4), модифицировав, однако, уравнение (9.3) следующим образом

$$u \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + w \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} + S w = K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right), \quad (9.22)$$

где  $S < 0$ . Краевые условия по  $r$  по-прежнему формулируются согласно (9.5) и (9.6). Для того, чтобы можно было получить аналитическое решение задачи, вновь предполагается (Гутман, 1969), что во всем слое термика  $K = \text{const}$ ,  $S = \text{const} < 0$ . Чтобы решение поставленной задачи имело физический смысл, необходимо наложить ограничение на полный поток воздуха через горизонтальную поверхность, проведенную на любой конечной высоте:

$$M(z) = 2\pi \int_0^{\infty} w r dr < \infty \quad \text{при } z < \infty. \quad (9.23)$$

Краевые условия по  $z$  заранее не ставятся. После того, как решения будут получены, можно будет установить, каким условиям по  $z$  они удовлетворяют, и выбрать те, что имеют физический смысл.

При однородных краевых условиях, записанная выше система уравнений (9.1), (9.2), (9.4) и (9.22) имеет тривиальное решение

$$u = w = \mathcal{G} = \pi = 0, \quad (9.24)$$

соответствующее покою при равновесном состоянии атмосферы. Вместе с тем, если атмосфера стратифицирована неустойчиво, то существует однозначное ненулевое решение сформулированной задачи, которое можно интерпретировать как спонтанный термик. Снова с помощью соотношений (9.10) вводится функция тока  $\psi$ , но решение ищется в виде

$$\psi = 2KzF(\zeta), \quad \vartheta = -\frac{S}{a}zF'(\zeta), \quad \zeta = \frac{r^2\sqrt{-\lambda S}}{4aK}, \quad (9.25)$$

где  $a$  - некоторая постоянная, введенная для удобства решения задачи, штрихом обозначено дифференцирование по  $\zeta$ . При этом

$$u = -\frac{2K}{r}F(\zeta), \quad w = \frac{\sqrt{-\lambda S}}{a}zF'(\zeta). \quad (9.26)$$

В результате задача может быть сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(\zeta F'')' + FF'' = F'^2 - aF', \quad (9.27)$$

которое необходимо решить, удовлетворив условиям

$$F = \sqrt{\zeta}F'' = 0 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow 0, \quad (9.28)$$

$$F' = 0, \quad F < \infty \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (9.29)$$

Поскольку величина  $a$  - произвольна, а  $F'(0)$  должна быть (в силу физического смысла задачи) конечна, то можно потребовать выполнения еще одного условия

$$F' = 1 \quad \text{при} \quad \zeta = 0. \quad (9.30)$$

Теперь постоянная  $a$  должна быть найдена вместе с  $F(\zeta)$  при решении сформулированной задачи.

Уравнение (9.27) можно формально переписать в виде интегрального уравнения, если считать правую часть известной:

$$F''(\zeta) = D(F'^2 - aF), \quad (9.31)$$

где обозначено

$$D(f) = \frac{1}{\zeta} \exp\left(-\int_0^\zeta \frac{F(\zeta')}{\zeta'} d\zeta'\right) \int_0^\zeta f(\zeta') \exp\left(\int_0^{\zeta'} \frac{F(\zeta'')}{\zeta''} d\zeta''\right) d\zeta',$$

причем расстановка пределов в интегралах соответствует условиям (9.28).

Интегрирование (9.31) с учетом (9.29) приводит к уравнению

$$F'(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} D(aF' - F'^2) d\zeta', \quad (9.32)$$

откуда в силу линейности оператора  $D$  и условия (9.30) получается следующее выражение для  $a$ :

$$a = \frac{1 + \int_0^{\infty} D(F'^2) d\zeta}{\int_0^{\infty} D(F') d\zeta}. \quad (9.33)$$

Дальнейшее интегрирование уравнения (9.32) с учетом (9.28) сводит задачу к нелинейному интегральному уравнению

$$F(\zeta) = \int_0^{\zeta} \int_{\zeta'}^{\infty} D(aF' - F'^2) d\zeta'' d\zeta', \quad (9.34)$$

в котором величина  $a$  рассчитывается с помощью формулы (9.33). Это интегральное уравнение может быть решено численно методом, например, последовательных приближений и при этом оказывается, что  $a = 1.144$ . Зная  $F(\zeta)$ , затем можно рассчитать  $\psi$ ,  $u$ ,  $w$  и  $\mathcal{G}$ . На рис. 9.2 приведена заимствованная из монографии Гутмана (1969) схематическая картина линий тока в осевом сечении спонтанного термика.

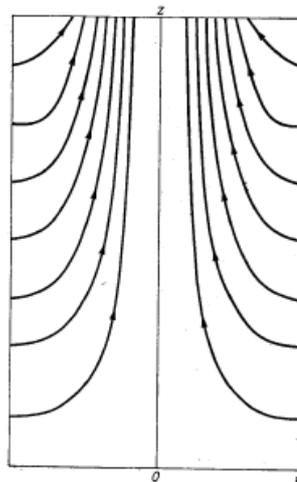


Рис. 9.2. Линии тока в осевом сечении термика (схематический чертеж).

Представление о профилях составляющих скорости и температуры в любом горизонтальном сечении термика дает рис. 9.3, на котором по оси ординат отложены безразмерные величины  $F'$  и  $F/\sqrt{a\zeta}$ , пропорциональные  $w$  (или  $\mathcal{G}$ ) и  $u$ , соответственно. По оси абсцисс отложена безразмерная координата  $\xi = \sqrt{\zeta}$ , пропорциональная  $r$ .

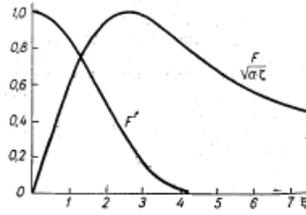


Рис. 9.3. Графики функций  $F'$  и  $F/\sqrt{a\zeta}$ .

Нетрудно установить, что вертикальная скорость  $w$  и отклонение температуры  $\mathcal{G}$  достигают своих наибольших значений на оси струи:

$$w|_{r=0} = \frac{z}{a} \sqrt{-\lambda S}, \quad \mathcal{G}|_{r=0} = -\frac{S}{a} z$$

и если положить, что  $S = -0.003$  град/м,  $K = 10$  м<sup>2</sup>/сек,  $z = 1$  км, то получатся следующие правдоподобные значения:

$$w|_{r=0} = 10 \text{ м/сек}, \quad \mathcal{G}|_{r=0} = 3^\circ.$$

Радиальная составляющая скорости  $u$  не зависит от высоты

$$u = -\frac{2K}{r} F(\zeta)$$

и достигает своего максимального значения  $u_{\max} \approx -1.6\sqrt[4]{-\lambda SK^2}$  на расстоянии  $r_{\max} \approx 5\sqrt[4]{-a^2 K^2 / \lambda S}$  от оси термика. Если подставить выписанные выше числовые значения параметров, то получится  $u_{\max} \approx -0.5$  м/сек при  $r_{\max} = 150$  м. Затухание  $u$  при  $r \rightarrow \infty$  происходит так же, как и в рассмотренном в предыдущем разделе термике – значительно медленнее, чем затухание  $w$  или  $\mathcal{G}$ .

Полный поток воздуха через любую горизонтальную поверхность с учетом (9.23) и (9.26) выражается следующим образом

$$M(z) = 4\pi K z F(\infty), \quad F(\infty) \approx 5.2.$$

Эта формула показывает, что каждый «погонный» метр термика вовлекает в движение воздух с боков в количестве (при принятых выше значениях параметров) примерно 650 м<sup>3</sup> в секунду, т.е. данная структура действует как мощный насос. Если подсчитать количество тепла, переносимого термиком вверх, то оно пропорционально величине

$$\int_0^\infty w \mathcal{G} r dr = -\frac{2KS}{a} z^2 \int_0^\infty F'^2(\zeta) d\zeta,$$

и реализация этого тепла и существование всего механизма термика в данном случае обусловлены освобождающейся (потенциальной) энергией неустойчивости. Решение нестационарных задач показывает (Гутман, 1969), что в неустойчиво стратифицированной покоящейся атмосфере процесс разрешения неустойчивости начинается под воздействием

теплового или динамического импульса, приложенного к какой-либо точке атмосферы и нарушающего неустойчивое равновесие. В результате за счет энергии неустойчивости формируется термическая струя, которая с течением времени может превратиться в стационарный спонтанный термик.

### 9.3. Смерчи и торнадо

Наблюдения показывают, что такие вихри часто перемещаются вместе с внешним ветром, так что можно использовать подвижную систему координат с началом на подстилающей поверхности и рассматривать стационарную задачу в предположении, что на достаточно большом расстоянии от вихря атмосфера неподвижна. Необходимо также учесть, что смерчи и торнадо – вращающиеся вокруг своей оси вихри и потому необходимо принимать во внимание вращательную (тангенциальную) составляющую скорости. Если предположить, что движение в вихре осесимметрично, то соответствующие уравнения в цилиндрической системе координат могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial \pi}{\partial z} + \lambda \mathcal{G} + \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\
 u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} &= K \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial vr}{\partial r} \right), \\
 u \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} + w \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} + S w &= \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right), \\
 \frac{v^2}{r} = \frac{\partial \pi}{\partial r}, \quad \frac{\partial ur}{\partial r} + \frac{\partial wr}{\partial z} &= 0,
 \end{aligned} \tag{9.35}$$

где  $v$  - тангенциальная составляющая скорости. Как и в случае термика, можно сформулировать следующие краевые условия:

$$\begin{aligned}
 u = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} &= 0 \quad \text{при } r = 0, \\
 w = \mathcal{G} = \pi &= 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{9.36}$$

Необходимо также, исходя из физического смысла задачи, потребовать, чтобы

$$v = 0 \quad \text{при } r = 0. \tag{9.37}$$

Из-за малых масштабов изучаемого явления сила Кориолиса не играет существенной роли. Можно предположить, однако, что причиной возникновения вращения в смерче или торнадо является общая завихренность атмосферы, например, в виде вращательного момента, который имеется в грозовых облаках. Если принять эту гипотезу, то необходимо каким-то образом задать интенсивность вращения. Следуя Гутману (1969), можно считать заданной циркуляцию воздуха по кругу достаточно большого радиуса с центром на оси вихря:

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \oint v ds = vr \Big|_{r \rightarrow \infty}. \tag{9.38}$$

Равенство (9.38) можно рассматривать как еще одно краевое условие для  $v$ . Наконец, как и в случае термика следует задать условие ограниченности полного потока воздуха через любую горизонтальную поверхность

$$M(z) = 2\pi \int_0^{\infty} wrdr < \infty. \quad (9.39)$$

Исходя из гипотезы, что существование вихря поддерживается за счет энергии неустойчивости, далее используется предположение  $S = \text{const} < 0$ .

Решение поставленной задачи ищется в виде

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2K}{r} F(\zeta), & w &= \frac{\sqrt{-\lambda S}}{a} zF'(\zeta), & v &= v(\zeta), \\ \mathcal{G} &= -\frac{S}{a} zF'(\zeta), & \pi &= \pi(\zeta), & \zeta &= \frac{r^2 \sqrt{-\lambda S}}{4aK}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Подстановка выражений (9.40) в уравнения (9.35) приводит к следующей системе уравнений:

$$(\zeta F'')' + FF'' = F'^2 - aF', \quad (9.41)$$

$$\zeta(\sqrt{\zeta}v)'' + F(\sqrt{\zeta}v)' = 0, \quad (9.42)$$

$$v^2 = 2\zeta\pi' \quad (9.43)$$

и краевых условий:

$$F = v = \sqrt{\zeta}F'' = 0 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow 0, \quad (9.44)$$

$$\left. \begin{aligned} F' = \pi = 0, & \quad F < \infty \\ \sqrt{\zeta}v = \frac{\sqrt[4]{-\lambda S}}{2\sqrt{aK}} \Gamma \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (9.45)$$

Поскольку уравнение (9.41) и краевые условия для  $F(\zeta)$  совпадают с теми, что выписаны в разделе 9.2 для спонтанного термика, то  $a = 1.144$ . Уравнения (9.42) и (9.43) легко интегрируются с учетом соответствующих краевых условий

$$v = \frac{\sqrt[4]{-\lambda S}}{2b\sqrt{aK}} \Gamma V(\zeta), \quad V = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^{\zeta} \exp\left(-\int_0^{\zeta'} \frac{F}{\zeta''} d\zeta''\right) d\zeta', \quad \pi = -\int_{\zeta}^{\infty} \frac{v^2}{2\zeta'} d\zeta', \quad (9.46)$$

где параметр  $b = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sqrt{\zeta}V \approx 1.101$ . Поскольку  $\pi = p'/\rho_0$  (см. главу 1), то можно оценить возмущение давления  $p'$ , вызванное вращающимся вихрем

$$p' = -\frac{\sqrt{-\lambda S}}{8ab^2K} \rho_0 \Gamma^2 P(\zeta), \quad P(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{V^2}{\zeta'} d\zeta'. \quad (9.47)$$

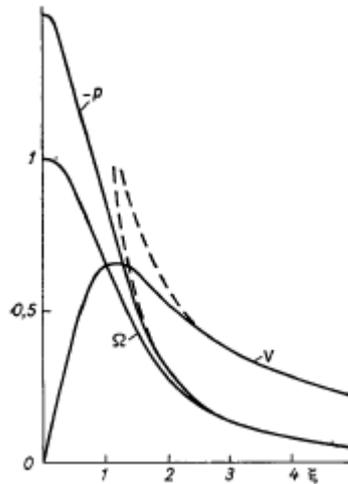


Рис. 9.4. Графики функций  $V$ ,  $P$  и  $\Omega$ .

На рис. 9.4 (Гутман, 1969) представлены графики функций  $V$  и  $P$  в зависимости от величины  $\xi = \sqrt{\zeta}$ . Пунктиром на этом рисунке приведены асимптотический вид этих функций

$$V|_{\zeta \rightarrow \infty} = \frac{b}{\sqrt{\zeta}}, \quad P|_{\zeta \rightarrow \infty} = \frac{b^2}{\zeta}, \quad (9.48)$$

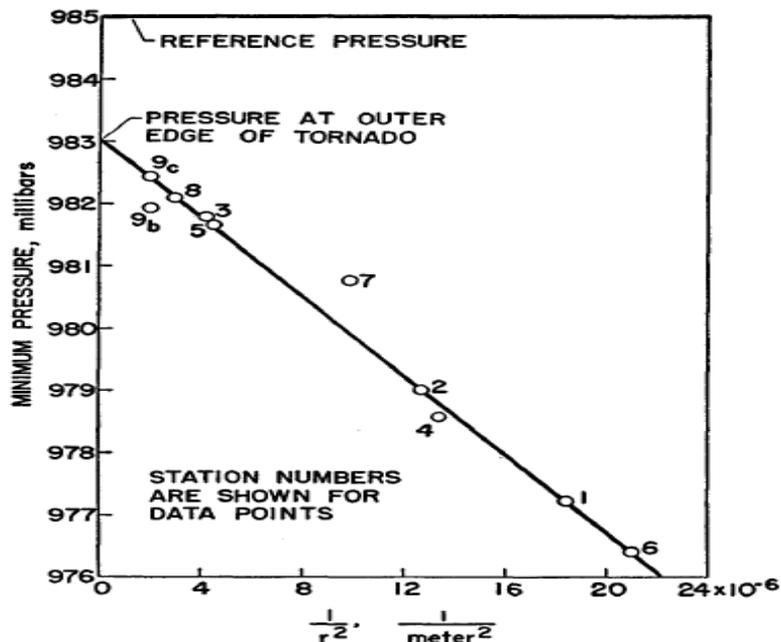


Рис. 9.5. Минимальные значения давления, наблюдавшиеся во время прохождения торнадо (Lewis and Perkins, 1953).

соответствующий известным формулам для идеального вихря (Кочин и др., 1963).

$$v|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\Gamma}{r}, \quad p'|_{r \rightarrow \infty} = -\frac{\rho_0}{2} \left( \frac{\Gamma}{r} \right)^2. \quad (9.49)$$

В работе (Lewis and Perkins, 1953) исследован случай торнадо, который прошел по территории Кливлендской обсерватории (США) 8 июня 1953 г. В зданиях обсерватории были расположены барографы, записи которых позволили определить минимумы давления, соответствующие моменту наименьшего расстояния от оси торнадо. На рис. 9.5 эти минимумы обозначены кружочками, причем по оси ординат отложено давление в миллибарах ( $1 \text{ мб} = 100 \text{ Па} = 1 \text{ гПа}$ ), по оси абсцисс – обратный квадрат расстояния до середины траектории торнадо, установленной с хорошей точностью по характеру разрушений на территории обсерватории. Как видно из этого рисунка, кружочки хорошо легли на одну прямую, соответствующую второй из формул (9.49). По наклону этой прямой можно вычислить значение циркуляции  $\Gamma$ , которое оказалось равным  $7500 \text{ м}^2/\text{сек}$ . В центре торнадо

$$p'|_{r=0} = -\frac{\sqrt{-\lambda S}}{8ab^2K} \rho_0 \Gamma^2 P(0)$$

и если использовать в качестве характерных значений  $K = 5 \text{ м}^2/\text{сек}$ ,  $\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda S = -10^{-4} \text{ сек}^{-2}$  и приведенное выше значение  $\Gamma$ , то окажется, что падение давления в центре торнадо может достигать  $100 \text{ гПа}$ . Можно также оценить максимальное значение вращательной скорости, которое в рассматриваемом случае равно  $\approx 75 \text{ м/сек}$  и достигается на расстоянии  $\approx 60 \text{ м}$  от оси вихря, что соответствует данным, приведенным в работе (Lewis and Perkins, 1953).

Определенный интерес представляет также распределение угловой скорости вращения

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\sqrt{-\lambda S}}{4abK} \Gamma \Omega(\zeta),$$

где  $\Omega(\zeta) = V(\zeta)/\sqrt{\zeta}$ . График функции  $\Omega$  также приведен на рис. 9.4. В центре торнадо угловая скорость достигает максимума, равного при выбранных характерных значениях параметров  $0.24 \text{ об/сек}$ .

## Глава 10. Фронты

Погода и характер атмосферных движений в тропосфере в значительной степени определяется поведением отдельных воздушных масс, которые более или менее длительно сохраняют свою индивидуальность, перемещаясь из одних регионов земли в другие. В атмосфере постоянно создаются условия, когда соседствуют две воздушные массы с разными свойствами. При этом они разделены сравнительно узкой, сильно наклоненной к земной поверхности, переходной зоной, именуемой *фронтом* (Хромов и Петросянц, 2001). Длина таких зон составляет тысячи километров, а ширина не превышает десятков километров. Вверх фронты прослеживаются на несколько километров, причем иногда до самой стратосферы. Ширина фронта и его толщина малы по сравнению с размерами разделяемых им воздушных масс, так что при теоретическом исследовании фронт можно рассматривать как *поверхность раздела* между воздушными массами. В пересечении с земной поверхностью фронтальная поверхность образует *линию фронта*, которую для краткости также называют фронтом.

Первая работа по гидродинамической теории фронтов принадлежит Маргулесу (Margules, 1906), который, сформулировав равенство между силами Кориолиса и давления, получил формулу, с помощью которой можно было вычислить угол наклона фронтальной поверхности в зависимости от значений температуры и скорости соприкасающихся воздушных масс. В этой и некоторых последующих работах (история вопроса подробно изложена в книге Гутмана, 1969) турбулентностью пренебрегалось, хотя турбулентное перемешивание и теплопроводность могут играть заметную роль в механизме фронтов.

Следуя Гутману (1969), целесообразно рассмотреть задачу о движении двух термически различных воздушных масс, соприкасающихся вдоль фронтальной поверхности, форма и положение которой заранее неизвестны. Составляющие скорости невозмущенного движения (отождествляемые с компонентами геострофического ветра  $U > 0$  и  $V$ ) предполагаются при этом известными (именно геострофический ветер, обусловленный заданным на высоте полем давления, приводит всю систему в движение). Имея в виду качественное рассмотрение исследуемой проблемы систему уравнений (8.1) можно упростить на основе следующих предположений:

1. можно пренебречь ускорениями (описываемые нелинейными слагаемыми) в уравнениях движения;
2. все характеристики движения не зависят от одной из горизонтальных (скажем,  $y$ ) координат и, следовательно, фронтальная поверхность, на которой температура терпит разрыв, является цилиндрической поверхностью с образующей, направленной вдоль  $y$ ;
3. фронтальная поверхность перемещается, не изменяя своей формы, в положительном направлении оси  $x$  с постоянной заданной скоростью  $c \geq 0$ , так что в системе координат, движущейся вместе с фронтом, процесс можно считать стационарным;
4. потенциальная температура каждой из воздушных масс известна и постоянна, т.е. влиянием динамики на поле температуры пренебрегается;
5. вертикальный коэффициент турбулентности считается постоянным, а горизонтальная турбулентность не учитывается.

Все эти упрощения приводят к следующей системе гидродинамических уравнений:

$$-\frac{\partial \pi_n}{\partial x} + f(v_n - V) + K \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = 0, \quad (10.1)$$

$$-f(u_n - U) + K \frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2} = 0, \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0, \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial \pi_n}{\partial z} = \lambda \mathcal{G}_n, \quad (10.4)$$

где индексы  $n=1$  и  $n=2$  относятся к холодной и теплой воздушной массам, расположенным, соответственно, под и над фронтальной поверхностью;  $u_n, v_n, w_n$  - составляющие скорости ветра относительно Земли, а

$$\mathcal{G}_1 = \text{const} < 0, \quad \mathcal{G}_2 = 0. \quad (10.5)$$

Схема рассматриваемой модели приведена на рис. 10.1.

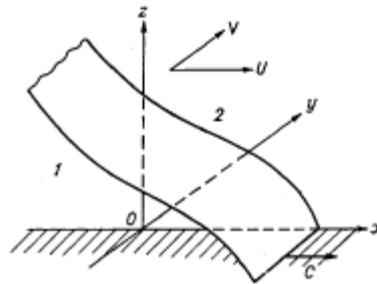


Рис. 10.1. Схематический чертеж модели фронтальной поверхности (Гутман, 1969).

Краевые условия формулируются следующим образом. Требуется, чтобы воздух «прилипал» к подстилающей поверхности

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (10.6)$$

а на фронтальной поверхности выполнялись бы условия непрерывности давления, скорости и потока импульса:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 = \pi_2, \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2 = (u_1 - c) \frac{dh}{dx}, \\ K \frac{\partial u_1}{\partial z} = K \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad K \frac{\partial v_1}{\partial z} = K \frac{\partial v_2}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad z = h, \quad (10.7)$$

где  $h(x)$  - высота фронтальной поверхности. Строго говоря, в (10.7) вместо производных по вертикали должны фигурировать производные по нормали к фронтальной поверхности; допустимость произведенного упрощения обусловлена малостью наклона фронта. Условие для  $w$  является следствием того, что частицы воздуха не проникают через фронтальную поверхность за счет упорядоченных движений, а перемещаются вдоль нее:

$$w_{z=h} = \left( \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} \right)_{z=h}, \quad (10.8)$$

причем в подвижной системе координат  $\frac{\partial h}{\partial t} = -c \frac{\partial h}{\partial x}$ . Наконец, на больших высотах ветер должен стремиться к геострофическому, а возмущения давления должны затухать:

$$u_2 = U, \quad v_2 = V, \quad \pi_2 = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (10.9)$$

Если теперь подставить (10.5) в уравнение (10.4) и проинтегрировать по  $z$ , удовлетворив соответствующим граничным условиям из (10.7) и (10.9), то окажется, что

$$\pi_1 = \mu(h - z), \quad \pi_2 \equiv 0, \quad (10.10)$$

где  $\mu = -\lambda \mathcal{G}_1 = \text{const} > 0$ . В силу (10.10) уравнение (10.1) принимает вид

$$f(v_n - V) + K \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} = \mu \frac{dh}{dx}, \quad (10.11)$$

причем при  $n = 2$  правая часть этого уравнения равна нулю. При  $K = 0$  уравнение (10.11) сводится к известной формуле Маргулеса (Margules, 1906).

Проинтегрировав уравнение неразрывности (10.3) при  $n = 1$  сначала по  $z$  от 0 до  $h$  с учетом соответствующих краевых условий из (10.6) и (10.7), а затем по  $x$ , можно получить следующее балансное соотношение:

$$\int_0^h (u_1 - c) dz = Q, \quad (10.12)$$

где  $Q$  - постоянная интегрирования, с физической точки зрения представляющая собой отнесенный к единице длины линии фронта секундный расход холодного воздуха через вертикальную плоскость, перемещающуюся вместе с фронтом. В случае, когда фронт опирается на подстилающую поверхность,  $Q = 0$ . Если же фронтальная поверхность не доходит до Земли, но минимальная толщина слоя воздуха под фронтом мала по сравнению с максимальной, то можно также приближенно положить  $Q = 0$ .

Решение поставленной задачи не вызывает затруднений. Уравнения (10.11) и (10.2) можно записать относительно «комплексной» скорости  $\omega_n = u_n + i v_n$  в виде

$$K \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial z^2} - i f (\omega_n - \Omega) = \mu \frac{dh}{dx}, \quad (\Omega = U + iV), \quad (10.13)$$

подчинив соответствующим краевым условиям из (10.6), (10.7) и (10.9), а именно:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad \omega_2 = \Omega \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \\ \omega_1 = \omega_2, \quad K \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = K \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \quad \text{при } z = h. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Решение задачи (10.13) – (10.14) записывается следующим образом:

$$\frac{u}{U} = S_2(\zeta) - \left( \alpha + \frac{d\eta}{d\xi} \right) S_1(\zeta) + \frac{1}{2} \frac{d\eta}{d\xi} \left[ S_1(\zeta + \eta) + \text{sign}(\zeta - \eta) S_1(|\zeta - \eta|) \right], \quad (10.15)$$

$$\frac{v}{U} = S_1(\zeta) + \left( \alpha + \frac{d\eta}{d\xi} \right) S_2(\zeta) - \frac{1}{2} \frac{d\eta}{d\xi} \left[ S_2(\zeta + \eta) + \text{sign}(\zeta - \eta) S_2(|\zeta - \eta|) \right], \quad (10.16)$$

где  $\alpha = V/U$ ,  $S_1(\varphi) = e^{-\varphi} \sin \varphi$ ,  $S_2(\varphi) = 1 - e^{-\varphi} \cos \varphi$  и

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{при } \zeta > \eta, \\ u_2, & \text{при } \zeta < \eta. \end{cases} \quad v = \begin{cases} v_1 & \text{при } \zeta > \eta, \\ v_2 & \text{при } \zeta < \eta. \end{cases}$$

В формулах (10.15) и (10.16) фигурируют безразмерные координаты  $\xi$  и  $\zeta$ , а также безразмерная высота фронтальной поверхности  $\eta$ , связанные с соответствующими размерными величинами соотношениями

$$\xi = \frac{fU}{\mu} \sqrt{\frac{f}{2K}} x, \quad \zeta = \sqrt{\frac{f}{2K}} z, \quad \eta = \sqrt{\frac{f}{2K}} h. \quad (10.17)$$

Если положить в качестве характерных величин  $U = 10$  м/сек,  $f = 10^{-4}$  сек<sup>-1</sup>,  $\vartheta_1 = -10^\circ$ , то  $\mu = \frac{1}{3}$  м/сек<sup>2</sup> и единице по  $\xi$  будет соответствовать  $\approx 150$  км, а единице по  $\zeta$  и  $\eta$  - 450 м. Уравнение для определения формы фронтальной поверхности получается после подстановки решения (10.15) в соотношение (10.12) при  $Q = 0$  и последующего его интегрирования:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{1 + \alpha - 2(1 - C)\eta - e^{-\eta} [(\alpha + 1) \cos \eta + (\alpha - 1) \sin \eta]}{\frac{3}{2} - 2e^{-\eta} (\sin \eta + \cos \eta) + \frac{1}{2} e^{-2\eta} (\sin 2\eta + \cos 2\eta)}, \quad (10.18)$$

где  $C = c/U$ .

При  $\eta \ll 1$  правую часть уравнения (10.18) можно разложить в ряд по степеням  $\eta$  и записать это уравнение в виде

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{3C}{\eta^2} + \frac{3(1 - \alpha)}{2\eta} + \alpha + \dots \right]. \quad (10.19)$$

Возможны два существенно разных случая: движущийся фронт ( $C > 0$ ) и стационарный фронт ( $C = 0$ ). В случае движущегося фронта можно отбросить в правой части уравнения (10.19) все слагаемые кроме первого и затем, проинтегрировав получившееся выражение при условии  $\eta(0) = 0$ , означаящем, что начало координат помещено на линии фронта, найти форму приземного участка фронтальной поверхности

$$\eta = \sqrt[3]{-\frac{9}{2}C\xi}. \quad (10.20)$$

Поскольку  $C > 0$  и  $\eta \geq 0$ , то, согласно (10.20),  $\xi \leq 0$ . Таким образом, из движущихся фронтов опираться на подстилающую поверхность может лишь холодный (т.е. перемещающийся в сторону более теплой воздушной массы) фронт, за которым движется холодная воздушная масса. При этом участок фронтальной поверхности, прилегающий к Земле, должен составлять с земной поверхностью прямой угол.

Интерес также представляют те значения  $\eta$ , при которых  $d\eta/d\xi$  обращается в нуль и, следовательно, фронтальная поверхность становится горизонтальной. Из (10.18) следует, что этому условию соответствует следующее трансцендентное уравнение:

$$C = 1 + \frac{e^{-\eta}[(\alpha + 1)\cos\eta + (\alpha - 1)\sin\eta] - (\alpha + 1)}{2\eta}. \quad (10.21)$$

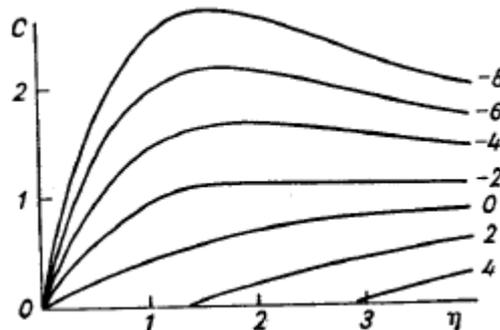


Рис. 10.2. График для определения горизонтальных асимптот интегральных кривых (Гутман, 1969).

На рис. 10.2 построены кривые  $C = C(\eta, \alpha)$ , с помощью которых по заданным  $\alpha$  и  $C$  можно найти те значения  $\eta$ , при которых фронтальная поверхность становится горизонтальной. Поскольку знаменатель правой части (10.18) обращается в нуль только при  $\eta = 0$ , то фронтальная поверхность ни в одной точке, кроме  $\eta = 0$ , не может стать вертикальной. Как видно из приведенного рисунка, в зависимости от значений  $\alpha$  и  $C$  уравнение (10.21) может иметь один корень, один двукратный корень, два различных корня или вообще не иметь корней. Таким образом, интегральные кривые уравнения (10.18) могут иметь одну или две горизонтальные асимптоты или же не иметь их вообще. Если обозначить через  $\eta_1$  и  $\eta_2$  ( $\eta_2 > \eta_1 > 0$ ) корни уравнения (10.21) и принять во внимание, что при переходе через  $\eta = \eta_1$  и  $\eta = \eta_2$  наклон фронтальной поверхности меняет знак, то можно выделить 6 возможных типов фронтальных поверхностей в случае движущегося фронта, схематически представленных на рис. 10.3. На этом рисунке пунктиром отмечены положения прямых  $\eta = \eta_1$  и  $\eta = \eta_2$ .

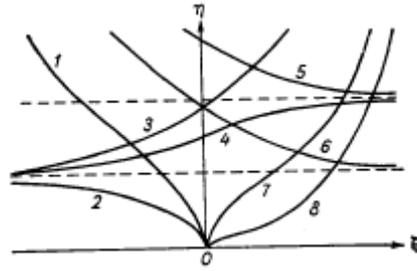


Рис. 10.3. Возможные типы фронтальных поверхностей.

Кривая 1 на рис. 10.3 соответствует случаю отсутствия асимптоты, кривые 2 и 3 – ситуации, когда имеется одна асимптота  $\eta = \eta_1$ , совокупность кривых 2, 4 и 5 – случаю, когда имеются две асимптоты  $\eta = \eta_1$  и  $\eta = \eta_2$ , кривая 6 отражает предельное положение кривой 5, когда  $\eta_2 \rightarrow \eta_1$ . Кривые 1 и 2 соответствуют холодным движущимся фронтам, а кривые 3 и 4 – теплым (в этом случае теплый воздух натекает на лежащий под ним в виде клина холодный воздух). Кривые 5 и 6 не имеют физического смысла, поскольку условие  $Q = 0$  в балансном уравнении (10.12) становится слишком грубым. Как видно из рис. 10.3, перемещающаяся воздушная масса может быть ограниченной по высоте (кривые 2 и 4) и неограниченной (кривые 1 и 3). Кривая 3 также показывает, что движущийся теплый фронт тянет за собой пленку холодного воздуха, толщина которой по данным наблюдений может быть от нескольких десятков до нескольких сотен метров.

В случае неподвижного фронта  $C = 0$  и при  $\eta \ll 1$  соотношение (10.19) переходит в уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \begin{cases} \frac{3(1-\alpha)}{4\eta} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

интегрированием которого находится форма приземного участка фронтальной поверхности

$$\eta = \begin{cases} \sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{2}} \xi & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \frac{1}{2} \xi & \text{при } \alpha = 1. \end{cases} \quad (10.22)$$

Начало координат по-прежнему помещено на линии фронта. Из формулы (10.22) следует, что при  $\alpha < 1$  должно быть  $\xi > 0$  и, соответственно,  $\xi < 0$  при  $\alpha > 1$ . И в том, и в другом случае участок фронтальной поверхности, прилегающий к подстилающей поверхности, составляет с ней прямой угол. Если же  $\alpha = 1$ , т.е. геострофический ветер направлен под углом  $45^\circ$  к линии фронта, то фронтальная поверхность подходит к земле под острым углом. Уравнение (10.21) при  $C = 0$  согласно рис. 10.2 имеет один положительный корень при  $\alpha > 1$  и не имеет таковых для остальных значений  $\alpha$ . Следовательно, стационарные фронтальные поверхности могут либо иметь одну

горизонтальную асимптоту  $\eta = \eta_1$ , либо не иметь их вообще. На рис. 10.3 возможным формам фронтальных поверхностей в случае неподвижного фронта соответствуют кривые 2 и 3 – при  $\alpha > 1$ , кривая 7 – при  $\alpha < 1$  и кривая 8 – при  $\alpha = 1$ .

Интерес представляют значения  $\eta$ , при которых вертикальная скорость на фронтальной поверхности обращается в нуль. В силу соответствующего краевого условия из (10.7), в этих точках

$$\frac{u_1}{U} \Big|_{\zeta=\eta} = C. \quad (10.23)$$

Решение трансцендентного уравнения (10.23) показало (Гутман, 1969), что при  $C > 0.9$  на фронтальной поверхности имеет место одна и только одна перемена знака вертикальной составляющей скорости. Ордината точки фронтальной поверхности, где вертикальная скорость равна нулю, возрастает при приближении  $C$  к 0.9 сверху. При  $C \leq 0.9$  вертикальная скорость на фронтальной поверхности остается знакопостоянной.

Для больших значений  $\eta$  ( $\eta > 10$ ) после упрощений правой части уравнения (10.18) и интегрирования можно получить следующее асимптотическое представление

$$\eta = \frac{1 + \alpha}{2(1 - C)} + A e^{-\frac{4C}{3}\xi}, \quad (10.24)$$

где  $A$  – постоянная интегрирования, которая находится из условия «склейки» значений  $\xi(\eta)$ , полученных по формулам (10.18) и (10.23) при  $\eta = 10$ . Следует заметить, что рассматриваемый интервал значений безразмерной переменной  $\eta$  охватывает практически всю тропосферу.

Чтобы получить представление о характере движения холодной и теплой воздушных масс, целесообразно построить линии тока в подвижной системе координат, используя для этого уравнение неразрывности (10.3). Записав его в подвижной системе координат и введя безразмерную функцию тока  $\psi$  из соотношений

$$u - c = U \sqrt{\frac{2K}{f}} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -U \sqrt{\frac{2K}{f}} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

можно получить следующую формулу

$$\psi = \int_0^{\zeta} \left( \frac{u}{U} - C \right) d\zeta'. \quad (10.25)$$

На приведенных далее рисунках, заимствованных из монографии Гутмана (1969), нанесены вертикальные разрезы фронтов различных типов, построенные в системе координат, движущейся вместе с фронтом. Полуяирной кривой обозначена проекция фронтальной поверхности на вертикальную плоскость, перпендикулярную линии фронта, а тонкими линиями и пунктиром представлены соответствующие проекции поверхностей тока. Стрелки указывают направление течений в подвижной системе координат.

Тип I. Мощный теплый тропосферный *анафронт*, соответствующий параметрам  $0 \leq C < 0.9$  и  $\alpha < 0$ . Согласно метеорологическому словарю Хромова и Мамонтовой (1974), это фронт с восходящим скольжением теплого воздуха над фронтальной поверхностью. Рис. 10.4 демонстрирует картину движения этого типа, полученную при  $C = 0.5$  и  $\alpha = -4$ . Особенностью этого типа фронта является наличие в холодной воздушной массе замкнутых линий тока.

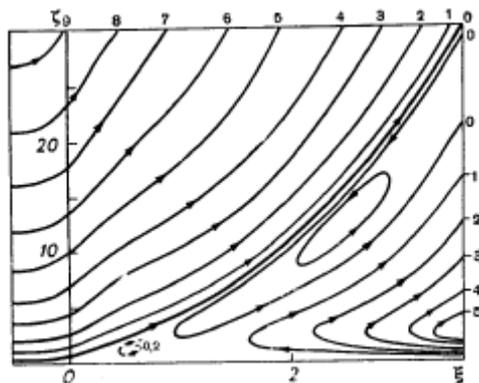


Рис. 10.4. Линии тока на вертикальном разрезе, нормальном к фронтальной поверхности (тип I).

Тип II. Теплый невысокий *анакатафронт*, соответствующий параметрам  $C > 0.9$  и  $\alpha < 0$ . Характерным для него является восходящее движение теплого воздуха непосредственно за фронтом и слабая циркуляция холодного воздуха. Соответствующая картина движений, рассчитанная при  $C = 1.2$  и  $\alpha = -6$ , приведена на рис. 10.5.

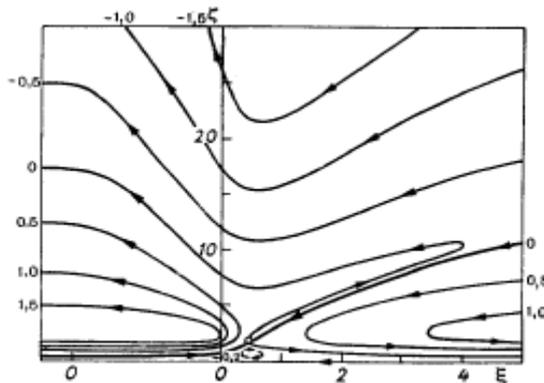


Рис. 10.5. Линии тока на вертикальном разрезе, нормальном к фронтальной поверхности (тип II).

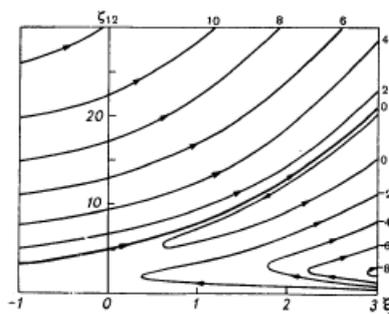


Рис. 10.6. Линии тока на вертикальном разрезе, нормальном к фронтальной поверхности (тип III).

Тип III. Мощный стационарный фронт, соответствующий параметрам  $C = 0$  и  $1 < \alpha < 2$ . Особенностью этого типа фронта является наличие слабой нисходящей струи под фронтальной поверхностью. На рис. 10.6 приведена картина движения воздуха в рассматриваемом случае, рассчитанная при  $C = 0$  и  $\alpha = 1.5$ . Картины стационарных фронтов, соответствующих  $\alpha < 1$ , отличаются от представленной на рис. 10.5 тем, что фронтальные поверхности в данном случае опираются на подстилающую поверхность под прямым углом.

Тип IV. Мощный холодный катаанафронт, соответствующий параметрам  $C > 0.9$ ,  $\alpha > 0$ . Этот тип фронта характеризуется слабым нисходящим движением воздуха непосредственно под фронтом и циркуляцией воздуха в передней части холодной воздушной массы. Пример такого рода фронта, соответствующий параметрам  $C = 1.5$ ,  $\alpha = 2$  приведен на рис. 10.7.

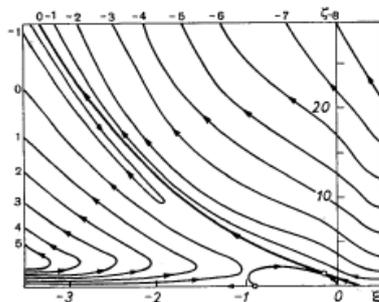


Рис. 10.7. Линии тока на вертикальном разрезе, нормальном к фронтальной поверхности (тип IV).

Тип V. Мощный холодный катаанафронт, соответствующий параметрам  $C > 0.9$ ,  $\alpha < 0$ , отличается от фронта предыдущего типа слабой циркуляцией теплого воздуха перед фронтом. Пример такого случая, рассчитанных при значениях параметров  $C = 1.5$ ,  $\alpha = -2$ , приведен на рис. 10.8.

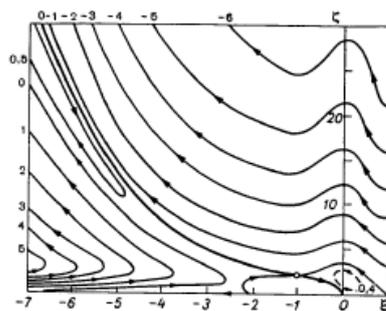


Рис. 10.8. Линии тока на вертикальном разрезе, нормальном к фронтальной поверхности (тип V).

Тип VI. Холодный невысокий катафронт, т.е. фронт с нисходящим движением теплого воздуха над фронтальной поверхностью (Хромов и Мамонтова, 1974), соответствующий параметрам  $0 < C \leq 0.9$ ,  $\alpha > 0$ . Особенностью этого типа является восходящее движение теплой воздушной массы перед фронтом. Рис. 10.9 демонстрирует пример такого фронта, рассчитанный при значениях параметров  $C = 0.8$ ,  $\alpha = 5$ .

Изложенная теория легко обобщается на случай высотных фронтов, в которых вся фронтальная поверхность расположена на высоте в несколько километров (Калажиков,

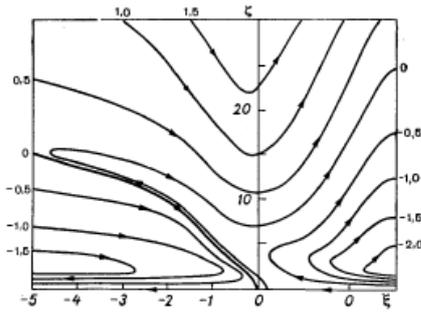


Рис. 10.9. Линии тока на вертикальном разрезе, нормальном к фронтальной поверхности (тип VI).

1967). В этом случае поток  $Q$  может быть значительным и пренебрегать его влиянием на динамику фронта нельзя. Для того чтобы однозначно определить положение фронта, в этом случае необходимо задать высоту фронтальной поверхности при  $x = \infty$  или  $x = -\infty$ . Кроме того, для больших высот  $S_1(\eta) \approx 0$ , а  $S_2(\eta) \approx 1$ , так что формулы сильно упрощаются, позволяя тем не менее получать качественные выводы.

## Глава 11. Неустойчивость экмановского течения и вторичные циркуляции

Данные натурных экспериментов свидетельствуют о том, что среднее течение в пограничном слое атмосферы зачастую сопровождается вторичными структурами, связанными с реализацией процессов гидродинамической неустойчивости. Когда вторичный поток мал по сравнению со средним, его целесообразно исследовать как возмущение среднего течения. На рис. 11.1 приведен снимок с космического корабля Аполлон, сделанный 4 апреля 1968 г. в 15 час по Гринвичу. На этом рисунке отчетливо видны ориентированные в направлении геострофического ветра и расположенные над сушей «облачные улицы», представляющие собой пример наложенных на среднее течение вторичных циркуляций.



Рис. 11.1. Вид побережья штата Джорджия (США) с высоты 125 миль (Brown, 1974)

Можно выделить два основных механизма возникновения возмущений в среднем потоке и связанных с этим преобразований энергии. Первый из них – гравитационная неустойчивость, обусловленная наличием минимума потенциальной энергии. Классическим примером здесь является конвективная неустойчивость, возникающая в подогреваемой снизу жидкости и которую можно объяснить, рассматривая устойчивость смещенной нагретой частицы в стратифицированной окружающей среде (Монин и Яглом, 1965). При любом законе изменения плотности несжимаемой жидкости с высотой  $\rho = \rho(z)$  уравнения движения допускают решение  $\vec{u}(\vec{x}, t) = 0$ , соответствующее состоянию покоя; при этом только при наличии поля тяжести давление должно меняться с высотой по закону:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad p(z) = g \int_z^{\infty} \rho(z') dz' + \text{const}. \quad (11.1)$$

Пусть вследствие какого-нибудь возмущения некоторая частица жидкости переместится с уровня  $z$  на новый уровень  $z' = z + \delta$ . Если плотность  $\rho$  убывает с высотой, то при  $\delta > 0$  эта частица под действием силы тяжести будет стремиться опуститься вниз, а при  $\delta < 0$  она под действием архимедовой силы будет стремиться подняться вверх, так что равновесие будет устойчивым. Однако если плотность возрастает с высотой, то при любом знаке  $\delta$  сместившаяся частица жидкости будет еще дальше удаляться от своего первоначального положения, так что состояние равновесия оказывается абсолютно неустойчивым.

Другой тип неустойчивости возникает в течении со сдвигом и проявляется, например, в виде волн Кельвина – Гельмгольца, наблюдаемые в атмосфере, в частности, как чечевицеобразные облака на верхней границе слоя со сдвигом скорости. Наличие точки перегиба профиля скорости (в невязкой среде) как критерий неустойчивости был введен Рэлеем (Rayleigh, 1880) и Толлмином (Tollmien, 1935). Линем (Lin, 1945) дано физическое объяснение этого явления с помощью метода частиц в предположении, что жидкость заполнена вращающимися нитями. Вихревая нить, имеющая первоначально завихренность  $\zeta_1$  и перемещающаяся на новый уровень  $z_2$ , меняет поле завихренности на новом уровне. Сила

$$F \approx \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} \int_{z_1}^{z_2} w^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz,$$

действующая на частицу в случае монотонного профиля завихренности стремится вернуть частицу в первоначальное состояние. В точке перегиба профиля скорости эта сила обращается в нуль и вихревая частица продолжает двигаться под влиянием начального импульса.

В планетарном пограничном слое спираль Экмана наблюдается весьма редко и потому представляется целесообразным проверить, является ли устойчивым решение уравнений, описывающих баланс сил Кориолиса и турбулентной вязкости. Особенностью этого решения является наличие точки перегиба в профиле скорости, в которой как раз и возникает неустойчивость.

### 11.1. Уравнения теории устойчивости

Следуя Брауну (Brown, 1974), в случае экмановского слоя можно воспользоваться приближением Буссинеска и записать уравнения гидротермодинамики пограничного слоя атмосферы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= -\nabla \pi + K_M \nabla^2 \vec{u} + \lambda g \vec{n} - f \vec{n} \times \vec{u}, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vartheta + S \vec{u} \cdot \vec{n} &= K_H \nabla^2 \vartheta, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где по-прежнему  $\vec{u} = (u, v, w)$  - вектор скорости в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ , причем ось  $z$  направлена вертикально вверх;  $\mathcal{G}$  - отклонение потенциальной температуры от ее фонового распределения  $\theta(z)$ , причем  $S = d\theta/dz = \text{const}$ ;  $\pi$  - величина, пропорциональная отклонению давления от его фонового распределения;  $\vec{n}$  - единичный вектор, ортогональный подстилающей поверхности;  $f$  - параметр Кориолиса;  $\lambda$  - параметр плавучести;  $K_M$  и  $K_H$  - предполагающиеся постоянными коэффициенты турбулентности для импульса и тепла.

Пусть ось  $x$  направлена вдоль геострофического ветра. Проблему устойчивости экмановского течения целесообразно исследовать для всех возможных двумерных (зависящих от  $y$  и  $z$ ) возмущений. Пусть  $U$  и  $V$  - компоненты экмановского вектора скорости, удовлетворяющие (в Северном полушарии) следующим соотношениям (см. главу 7):

$$\begin{aligned} U &= G \left[ 1 - \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) \right], \\ V &= G \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \sin\left(\frac{z}{h_E}\right), \end{aligned} \quad (11.2)$$

где  $G$  - скорость геострофического ветра,  $h_E = \sqrt{2K_M/f}$ . Поскольку будут рассматриваться двумерные возмущения (считается, что  $u = U + u'$ ,  $v = V + v'$ ,  $w = w'$ ), малые по сравнению с основным течением, то уравнения (11.1) можно линеаризовать и записать в следующей форме (штрихи опущены):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial y} + w U_z = f v + K_M \Delta u, \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial y} + w V_z = -\frac{\partial \pi}{\partial y} - f u + K_M \Delta v, \quad (11.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \pi}{\partial z} + \lambda \mathcal{G} + K_M \Delta w, \quad (11.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + S w = K_H \Delta \mathcal{G}, \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (11.7)$$

где  $\Delta = \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ . Уравнение неразрывности (11.7) позволяет ввести функцию тока  $\psi$  из соотношений

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (11.8)$$

а уравнения (11.3) – (11.6) могут быть переписаны в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \chi \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial y} - U_z \frac{\partial \psi}{\partial y} - \text{Ro}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \text{Re}^{-1} \Delta u &= 0, \\ \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + V \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} - V_z \frac{\partial \psi}{\partial y} + \text{Ro}^{-1} u - \text{Re}^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi + \frac{\partial \pi}{\partial y} &= 0, \\ \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + V \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \mathcal{G} - \text{Re}^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \pi}{\partial z} &= 0, \\ \chi \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} - \text{Ri} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \text{Re}^{-1} \text{Pr}^{-1} \Delta \mathcal{G} &= 0, \end{aligned} \quad (11.9)$$

где  $\chi = L/GT$ ,  $\text{Ri} = \lambda SL^2/G^2$  - число Ричардсона,  $\text{Ro} = G/fL$  - число Россби,  $\text{Re} = GL/K_M$  - число Рейнольдса,  $\text{Pr} = K_M/K_H$  - число Прандтля ( $L$  и  $T$  - произвольные масштабы длины и времени). При переходе к безразмерным величинам компоненты скорости нормировались на скорость геострофического ветра  $G$ , отклонение потенциальной температуры – на  $G^2/\lambda L$ , а приведенное отклонение давления  $\pi$  – на  $G^2$ .

Если в качестве масштаба времени выбрать  $T = L/G$ , то  $\chi = 1$ . Естественно также использовать в качестве масштаба длины величину  $h_E = \sqrt{2K_M/f}$ . Тогда можно ввести безразмерный параметр  $\xi = \text{Ro}^{-1} = 2\text{Re}^{-1}$  и переписать уравнения (11.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial y} - U_z \frac{\partial \psi}{\partial y} - \xi \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{2} \xi \Delta u &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + V \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} - V_z \frac{\partial \psi}{\partial y} + \xi u - \frac{1}{2} \xi \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi + \frac{\partial \pi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + V \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \mathcal{G} - \frac{1}{2} \xi \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \pi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} - \text{Ri} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{1}{2} \xi \text{Pr}^{-1} \Delta \mathcal{G} &= 0. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Таким образом, имеется система восьмого порядка, состоящая из четырех уравнений для неизвестных  $u$ ,  $\psi$ ,  $\mathcal{G}$  и  $\pi$ . Решение данной системы ищется в форме

$$\begin{Bmatrix} \psi \\ u \\ \mathcal{G} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_0(z) \\ u_0(z) \\ \mathcal{G}_0(z) \end{Bmatrix} \exp[i\alpha(y - ct)],$$

где  $\alpha$  - волновое число,  $c$  - комплексная переменная, вещественная часть которой есть волновая скорость, а мнимая - декремент роста или затухания. Если исключить перекрестным дифференцированием величину  $\pi$ , то можно получить следующие уравнения для амплитуд  $\psi_0$  и  $u_0$ :

$$\begin{aligned} (V - c)\psi_0'' - [V'' - \alpha^2(V - c)]\psi_0 + \frac{i\xi}{2\alpha}(\psi_0'''' - 2\alpha^2\psi_0'' + \alpha^4\psi_0) - \frac{i\xi}{\alpha}u_0' + \mathcal{G}_0 &= 0, \\ (V - c)u_0 - U'\psi_0 + \frac{i\xi}{2\alpha}(u_0'' - \alpha^2u_0) + \frac{i\xi}{\alpha}\psi_0' &= 0, \\ (V - c)\mathcal{G}_0 - \text{Ri}\psi_0 + \frac{i\xi}{2\alpha\text{Pr}}(\mathcal{G}_0'' - \alpha^2\mathcal{G}_0) &= 0, \end{aligned} \quad (11.11)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по  $z$ . Систему уравнений (11.11) можно свести к одному уравнению восьмого порядка для  $\mathcal{G}_0$ .

Численное решение этой системы показывает (Etling, 1971), что при  $\text{Re} < 500$  существенное влияние оказывают эффекты вращения (кориолисовы слагаемые) и турбулентной вязкости. Если пренебречь силой Кориолиса и стратификацией, т.е. последними двумя слагаемыми в первом из уравнений (11.11), то получится хорошо изученное уравнение четвертого порядка - уравнение Орра - Зоммерфельда:

$$(V - c)(\psi_0'' - \alpha^2\psi_0) - V''\psi_0 = -\frac{i}{\alpha\text{Re}}(\psi_0'''' - 2\alpha^2\psi_0'' + \alpha^4\psi_0). \quad (11.12)$$

Это уравнение хорошо исследовано. В частности, установлено, что среди его решений имеются такие, что экспоненциально растут, если  $V'' = 0$  где-нибудь на профиле скорости (Шлихтинг, 1969). Для геофизического пограничного слоя характерным значением является  $\xi = (2K_M f)^{1/2} / G \approx 10^{-3}$ . При  $\xi \rightarrow 0$  (т.е. при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ ) уравнение (11.12) сводится к уравнению

$$\psi_0'' - \left( \alpha^2 + \frac{V''}{V - c} \right) \psi_0 = 0, \quad (11.13)$$

при исследовании которого Рэлеем (Rayleigh, 1880) и была использована точка перегиба в качестве критерия неустойчивости. Уравнение (11.13) становится сингулярным в точке  $V = c_r$  (критический слой) и в этом слое существенными являются эффекты вязкости.

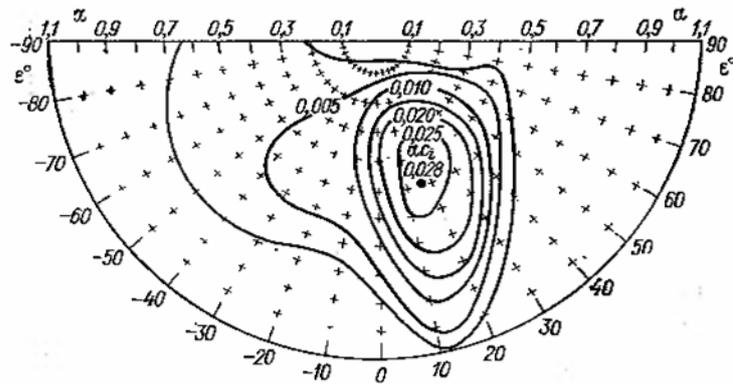


Рис. 11.2. Диаграмма устойчивости (скорость роста  $\alpha c_i$  в зависимости от угла  $\varepsilon$  и волнового числа  $\alpha$ ), рассчитанная при  $Ri = 0$ ,  $Re = 900$ ,  $\xi = 0.002$  (Brown, 1974).

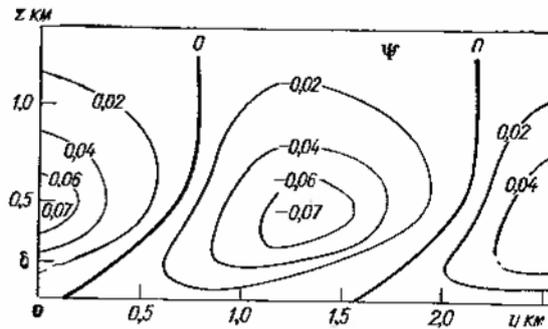


Рис. 11.3. Функция тока для вторичного течения при  $G = 10$  м/сек и  $h_E = 215.5$  м,  $Re = 1275$ ,  $\varepsilon = 20^\circ$ ,  $\alpha = 0.5$ .

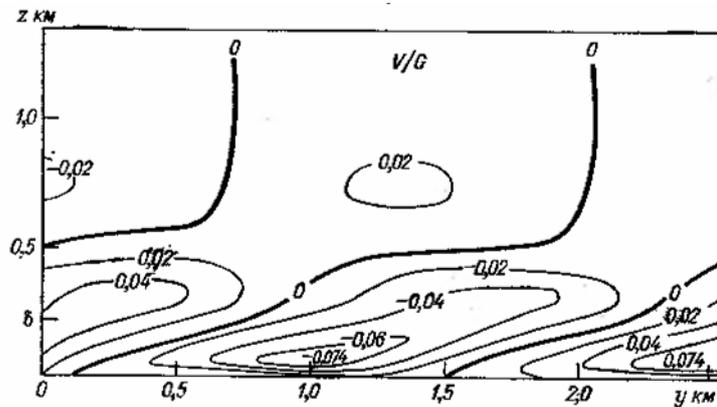


Рис. 11.4. То же, что на рис. 11.3, но для поперечной составляющей скорости вторичного потока.

Уравнение четвертого порядка (11.12) для случая нейтральной стратификации для любого набора параметров имеет одно неустойчивое собственное число, связанное с наличием точки перегиба (см. рис. 11.2, на котором  $\varepsilon$  - угол ориентации, т.е. угол между осью  $x$ , нормальной к плоскости, в которой находится возмущение, и направлением геострофического ветра, отсчитываемом против часовой стрелки). Фазовая скорость, соответствующая этому собственному значению, близка к средней скорости в точке перегиба. Течение Экмана неустойчиво внутри области, ограниченной контуром  $\alpha c_i = 0$ . Поскольку аналитический экмановский профиль имеет бесконечное число точек перегиба, то картина собственных мод на рис. 11.2 «расслоена»: более высоко расположенные точки

перегиба соответствуют все меньшей скорости роста  $\alpha c_i$ . Максимальная же скорость имеет место при  $\varepsilon = 18^\circ$  и  $\alpha = 0.5$ . На рисунках 11.3 – 11.5, также заимствованных из книги Брауна (Brown, 1974), приведены изолинии полей возмущений, построенные в плоскости  $(y, z)$ .

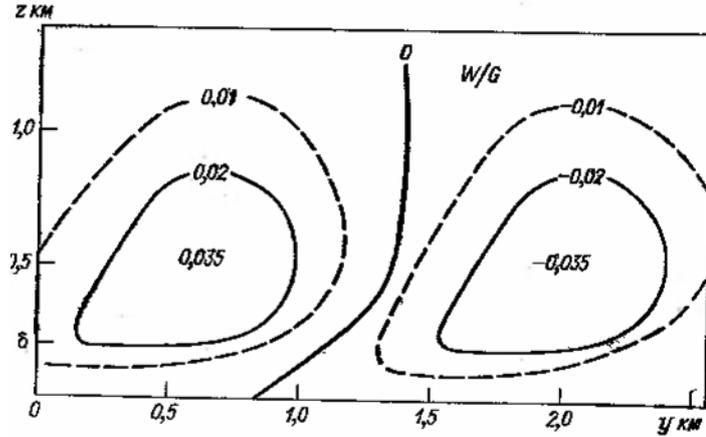


Рис. 11.5. То же, что на рис. 11.3, но для вертикальной скорости вторичного потока.

Расчеты также показали, что действие неустойчивой стратификации на параметры  $\varepsilon_m$  и  $\alpha_m$ , характеризующие максимальную скорость роста, проявляется в том, что волны становятся короче, а угол ориентации уменьшается. Влияние же устойчивой стратификации не очень существенно по сравнению с теми эффектами, что оказывает ослабление турбулентности.

## 11.2. Модель вторичного потока

Данные натуральных измерений свидетельствуют, что вторичные течения в пограничном слое атмосферы реально существуют и даже могут существенно изменять среднее течение. Умножая уравнения (11.3), (11.4) и (11.5) на  $u$ ,  $v$  и  $w$ , соответственно, складывая получившиеся выражения и интегрируя затем по длине волны вторичного потока  $L$  и по всей толще экмановского слоя, можно получить следующее уравнение баланса кинетической энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_0^{\infty} \int_0^L \left[ -(uwU_z + vwV_z) + \lambda w g - \left( v \frac{\partial \pi}{\partial y} + w \frac{\partial \pi}{\partial z} \right) \right] dy dz - D, \quad (11.14)$$

где

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^L (u^2 + v^2 + w^2) dy dz,$$

$$D = \int_0^{\infty} \int_0^L K_M \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz.$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (11.14) описывает обмен энергией между возмущением и средним потоком, а второе и третье слагаемые – работу, затрачиваемую

вторичной циркуляцией против сил плавучести и давления, соответственно, причем третье слагаемое при интегрировании по всей области обращается в нуль. Последнее слагаемое, описывающее диссипацию кинетической энергии, как правило, мало в силу большого различия в масштабах вторичного потока и турбулентных вихрей. В случае нейтральной стратификации и в пренебрежении силой Кориолиса и диссипацией условие энергетического баланса между средним движением и вторичной циркуляцией ( $\partial E / \partial t = 0$ ) дает

$$\int_0^{\infty} \overline{vw} W_z dz = 0, \quad (11.15)$$

где черта сверху означает осреднение по  $y$ . Условие (11.15) ограничивает амплитуду возмущения, а также означает, что, как показывают расчеты с использованием уравнения (11.12), энергия переносится от среднего потока к возмущению в нижней части пограничного слоя и в обратном направлении – в верхней.

Уравнения экмановского пограничного слоя атмосферы с учетом вторичных циркуляций можно получить осреднением по горизонтали исходных уравнений движения (11.1) с учетом того, что для крупномасштабных движений  $W \ll U$  и  $W \ll V$ . В стационарном приближении эти уравнения будут выглядеть следующим образом (ось  $x$  направлена вдоль геострофического ветра):

$$\begin{aligned} fV + K_M \frac{d^2 U}{dz^2} - \left( \overline{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= 0, \\ -f(U - G) + K_M \frac{d^2 V}{dz^2} - \left( \overline{v} \frac{\partial v}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Система уравнений (11.16) не замкнута и требуется та или иная процедура для расчета величин, снабженных знаком осреднения (черта сверху). Удобно записать уравнения (11.16) в безразмерном виде (используя в качестве масштаба высоты экмановский масштаб  $h_E = \sqrt{2K_M / f}$ , а скорости – скорость геострофического ветра  $G$ ):

$$\begin{aligned} 2V + \frac{d^2 U}{dz^2} &= A_1 \text{Re}, \\ -2(U - 1) + \frac{d^2 V}{dz^2} &= A_2 \text{Re}, \end{aligned} \quad (11.17)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  представляют собой вклад, обусловленный вторичным потоком, который может быть рассчитан, например, из решения первых двух уравнений (11.11) для возмущений в пренебрежении эффектами стратификации. Течение, описываемое уравнениями (11.17) удобно представить как сумму чисто экмановской составляющей ( $U_E, V_E$ ), получаемой из (11.17) при  $A_1 = A_2 = 0$ , и отклонения от нее:  $U = U_E + \bar{u}$ ,  $V = V_E + \bar{v}$ . Соответствующие уравнения для  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$  имеют вид:

$$2\bar{v} + \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} = A_1 \text{Re}, \quad -2\bar{u} + \frac{d^2 \bar{v}}{dz^2} = A_2 \text{Re}. \quad (11.18)$$

Браун (Brown, 1974) получил решение уравнений (11.18) в предположении, что  $A_1 = 0$  и  $A_2 \equiv -A$ , удовлетворяющее граничным условиям

$$\bar{u}(0) = \bar{v}(0) = \bar{u}(z_{\max}) = \bar{v}(z_{\max}) = 0,$$

в виде следующих аналитических выражений:

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= \operatorname{Re} \left[ C_1 \operatorname{sh} z \cos z - C_2 \operatorname{ch} z \sin z + 2 \int_0^z \operatorname{sh}(z - \zeta) \sin(z - \zeta) A(\zeta) d\zeta \right], \\ \bar{v}(z) &= \operatorname{Re} \left[ C_1 \operatorname{ch} z \sin z + C_2 \operatorname{sh} z \cos z - 2 \int_0^z \operatorname{ch}(z - \zeta) \cos(z - \zeta) A(\zeta) d\zeta \right], \end{aligned} \quad (11.19)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^{z_{\max}} (M \operatorname{ch} z' \cos z' - N \operatorname{sh} z' \sin z') A(\zeta) d\zeta, \\ C_2 &= \int_0^{z_{\max}} (N \operatorname{ch} z' \cos z' + M \operatorname{sh} z' \sin z') A(\zeta) d\zeta, \\ M &= \operatorname{ch} z_{\max} \sin z_{\max} / F, \quad N = \operatorname{sh} z_{\max} \cos z_{\max} / F, \\ F &= \operatorname{sh}^2 z_{\max} + \sin^2 z_{\max}, \quad z' = z_{\max} - \zeta. \end{aligned}$$

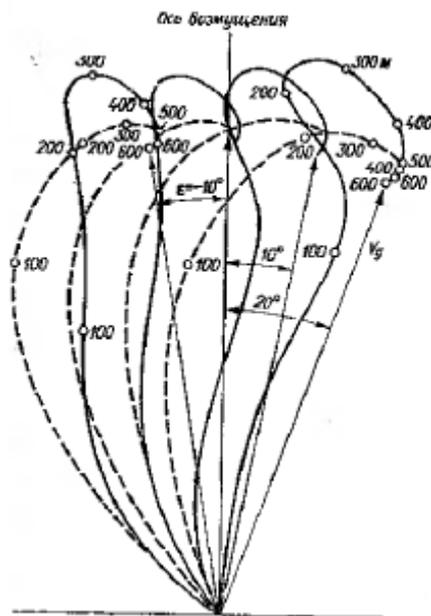


Рис. 11.6. Годографы средней скорости с учетом вторичного потока (Brown, 1974), рассчитанные при  $G = 10$  м/сек и  $h_E = 110$  м для различных значений угла ориентации  $\varepsilon$ .

Поскольку вид функции  $A$  определяется неустойчивой модой, то модифицированный вторичными циркуляциями профиль средней скорости в пограничном слое атмосферы зависит от  $\varepsilon$  (рис. 11.6). Рассчитанный с учетом искажений, обусловленных вторичным потоком, годограф скорости для конкретных условий (Brown, 1974) приведен на рис. 11.7 в сравнении с годографом Экмана и наблюдаемым (в данном случае угол  $\varepsilon$  был близок к нулю).

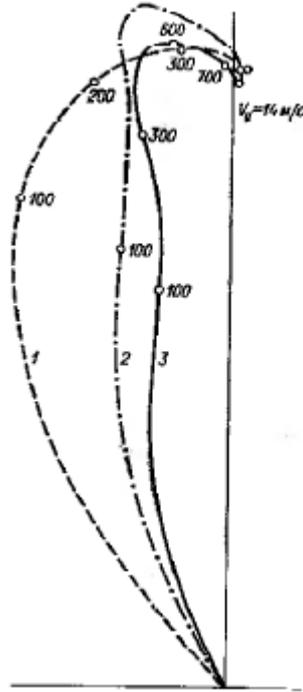


Рис. 11.7. Годограф среднего ветра, измеренный в Джексонвилле 4 апреля 1968 г. в сравнении с теоретическими результатами, полученными при  $Re = 3000$ ,  $h_E = 110$  м,  $G = 14$  м/сек и  $\alpha = 0.5$ . Кривые: 1 – годограф Экмана, 2 – теория ( $\varepsilon = 0$ ), 3 – наблюдаемый годограф.

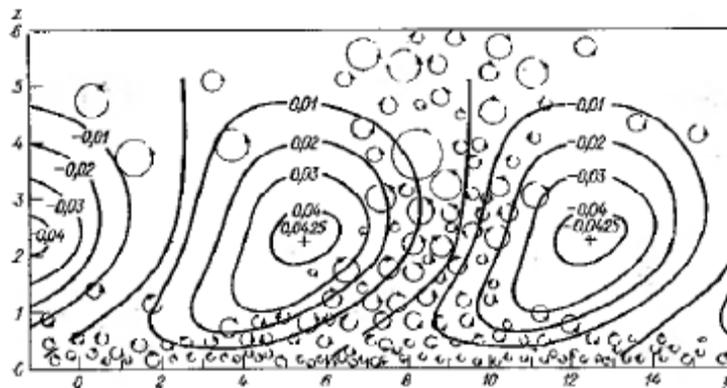


Рис. 11.8. Функция тока  $\psi$  для вторичного течения ( $Re = 900$ ,  $\varepsilon = 15^\circ$ ,  $Ri = 0$ ,  $\alpha = 0.5$ ). В схематической форме показано влияние вторичного течения на турбулентность. Значения  $z$  и  $y$  масштабированы на  $h_E$ .

В общем случае процедура расчета полной картины течений в пограничном слое атмосферы (или в верхнем слое океана) состоит в реализации следующих трех этапов: 1) по данным о геострофическом ветре рассчитывается экмановский профиль скорости; 2) находятся собственные значения и собственные функции системы уравнений Орра –

Зоммерфельда (вообще говоря, с учетом стратификации); 3) решается система уравнений для стационарного среднего потока и вторичной циркуляции. Полный поток представляет собой композицию среднего течения и вторичного потока. На рис. 11.8 и 11.9, заимствованных из книги Брауна (Brown, 1974) представлены, соответственно, поперечное сечение по нормали к возмущению и вторичные циркуляционные ячейки, наложенные на средний поток.

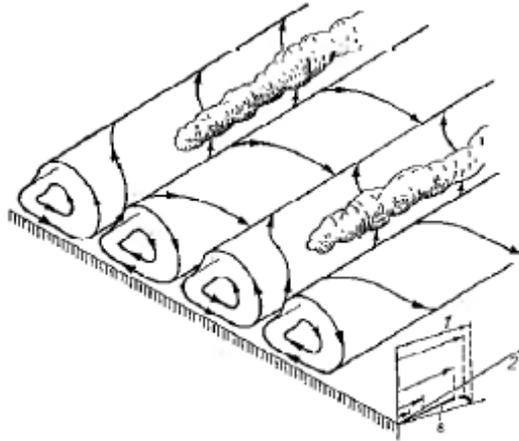


Рис. 11.9. Типичное поле вторичного потока в планетарном пограничном слое (модифицированный экмановский слой): 1 – геострофический ветер, 2 – ось возмущения.

Следует заметить, что значение волнового числа  $\alpha = 0.5$  для типичных значений экмановского масштаба  $h_E$  соответствует длине волны: в атмосфере - от 1.4 до 3 км, в океане – от 10 до 40 м. Это соответствует данным наблюдений и таким образом, изложенные в данной главе подходы могут быть использованы для решения проблемы параметризации потоков, обусловленных вторичными циркуляциями.

Натурные наблюдения и лабораторные эксперименты показывают, что некоторые гидродинамические системы демонстрируют установившиеся картины ламинарных течений, в то время как в других происходит их стохастизация. Примером такого процесса является стохастизация рассматриваемого ниже течения Лоренца, которая тем не менее не меняет его упорядоченной пространственной картины – т.н. конвективных роликов. Стохастизация пространственной картины течений приводит к новому качеству: в случайных местах и в случайные периоды времени на быстро меняющемся хаотическом фоне образуются *когерентные структуры*, представляющие собой упорядоченные пространственные структуры с относительно большими временами жизни. Монин и Яглом (1992) определяют такого рода структуры как предпочтительные нелинейные суперпозиции крупномасштабных пространственных компонент турбулентности, обладающие наименьшей неустойчивостью по отношению к возмущениям, существующим в турбулентном течении.

### 12.1. Термическая конвекция: задача Рэлея

Рассмотрим, например, термическую конвекцию в горизонтальном слое  $0 \leq z \leq h$ , описываемую уравнениями гидротермодинамики атмосферы в приближении Буссинеска (см. главу 1) и в пренебрежении силой Кориолиса

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\nabla\pi + K_M\Delta\vec{u} + \lambda\mathcal{G}\vec{n}, \\ \frac{d\mathcal{G}}{dt} + (\vec{u} \cdot \nabla)\mathcal{G} + S w &= K_H\Delta\mathcal{G}, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (12.1)$$

с заданными краевыми условиями

$$\vec{u} = 0, \quad \mathcal{G} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad \text{и при } z = h. \quad (12.2)$$

Здесь  $d/dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$ , а  $S = (\theta_h - \theta_0)/h$  – градиент фонового распределения потенциальной температуры. Стационарное решение задачи (12.1) – (12.2) имеет вид

$$\vec{u} = 0, \quad \mathcal{G} = 0.$$

Если ввести числа Рэлея  $Ra = -\lambda S h^4 / K_H^2$  и Прандтля  $Pr = K_M / K_H$ , масштабы длины  $h$  и времени  $h^2 / K_H$ , а также масштаб температуры  $K_H^2 / \lambda h^3$ , то уравнения (12.1) можно привести к следующему безразмерному виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= -\nabla\pi + Pr\nabla^2\vec{u} + \mathcal{G}\vec{n}, \\ \frac{d\mathcal{G}}{dt} &= wRa + \nabla^2\mathcal{G}, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Ограничиваясь двумерной постановкой задачи и принимая для простоты  $Pr = 1$ ,

уравнения (12.3) можно расписать покомпонентно следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{\partial\pi}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial\pi}{\partial z} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mathcal{G}, \\ \frac{d\mathcal{G}}{dt} &= \text{Ra}w + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{12.4}$$

где теперь  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + w\partial/\partial z$ . Линеаризируя эти уравнения, что сводится к замене  $d/dt$  на  $\partial/\partial t$  и отыскивая неизвестные функции  $f(x, z, t)$  в виде  $f_0(z)e^{i(kx - \omega t)}$ , можно получить следующее уравнение для комплексной амплитуды  $\mathcal{G}_0(z)$ :

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 + i\omega \right)^2 \mathcal{G}_0 + k^2 \text{Ra} \mathcal{G}_0 = 0\tag{12.5}$$

с краевыми условиями  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0'' = \mathcal{G}_0''' - (k^2 - i\omega)\mathcal{G}_0' = 0$  на нижней ( $z=0$ ) и верхней ( $z=1$ ) границах слоя, являющихся следствием условий (12.2). Таким образом, сформулирована задача на собственные значения, которая содержит два параметра (волновое число  $k$  и число Рэлея  $\text{Ra}$ ), так что любым заданным их значениям будет отвечать свой набор собственных чисел  $\omega(k, \text{Ra})$ . Оказывается (Монин и Яглом, 1992), что при отрицательных или малых положительных значениях  $\text{Ra}$  все числа  $\omega(k, \text{Ra})$  при всех значениях  $k$  имеют отрицательную мнимую часть. Начиная с некоторого критического значения  $\text{Ra}_{cr}$  появляется значение  $k = k_{cr}$ , при котором одно из собственных значений  $\omega(k_{cr}, \text{Ra}_{cr})$  имеет нулевую мнимую часть. Потеря устойчивости состояния покоя при достижении критического значения числа Рэлея приводит к возникновению стационарного конвективного движения, периодического по горизонтальным координатам (по  $x$  - в рассматриваемом случае). Качественно все основные черты процесса потери устойчивости в подогреваемой снизу жидкости были установлены Рэлеем (Rayleigh, 1916).

Для нахождения значений  $k_{cr}$  и  $\text{Ra}_{cr}$  можно положить в уравнении (12.5)  $\omega = 0$ , т.е. использовать уравнение

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 \mathcal{G}_0 + k^2 \text{Ra} \mathcal{G}_0 = 0.\tag{12.6}$$

Решения этого уравнения, удовлетворяющего выписанным выше краевым условиям, имеют вид  $\mathcal{Q}_0 = \sin \pi n z$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , так что при достаточно больших значениях числа Рэля имеются различные нейтральные возмущения (с  $\omega = 0$ ), волновые числа которых удовлетворяют соотношению

$$(\pi^2 n^2 + k^2)^3 = k^2 \text{Ra}. \quad (12.7)$$

Минимальное число Рэля при каждом заданном  $k$  связано с возмущением, для которого  $n = 1$ . Таким образом, критическое значение  $\text{Ra}_{cr}$  определяется из условия

$$\text{Ra}_{cr} = \min \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2},$$

что дает  $\text{Ra}_{cr} = 27\pi^4/4 \approx 657.5$ ,  $k_{cr} = \pi/\sqrt{2} \approx 2.2$ . Данные многочисленных лабораторных экспериментов и наблюдений в природе показывают, что возникающее течение обычно распадается на совокупность конвективных роликов, вытянутых вдоль какого-нибудь направления (схематически изображены на рис. 12.1), и ячеек (так называемые *ячейки Бенара*), имеющих форму шестигранных призм, в центре которых жидкость движется вверх, а на периферии вниз. В последнем случае имеет место и обратная картина: восходящие движения на периферии и нисходящие – в центре ячейки. В случае конвективных ячеек в приведенных выше формулах под  $k^2$  понимается сумма  $k^2 + l^2$ , где  $l$  - волновое число по  $y$ .

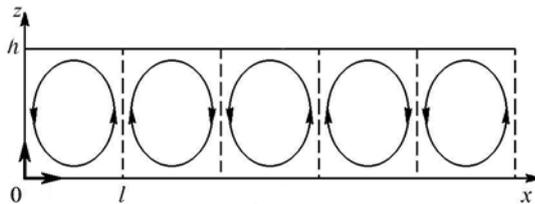


Рис. 12.1. Схематический вид конвективных роликов.

## 12.2. Система Лоренца

Если теперь рассмотреть конвективные ролики, вытянутые вдоль оси  $y$ , и использовать для их описания двумерный аналог уравнений (12.3), то после введения в плоскости  $(x, z)$  функции тока  $\psi$  их можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) &= \text{Pr} \Delta \psi + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + J(\psi, \mathcal{Q}) &= \Delta \mathcal{Q} + \text{Ra} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (12.8)$$

где якобиан  $J(\psi, \varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ . С увеличением числа Рэля

$Ra > Ra_{cr}$  движение в роликах перестает быть стационарным и со временем усиливается. Вначале его можно описать тремя модами (Монин и Яглом, 1992):

$$\begin{aligned}\psi &= \pi^{-1} (Ra_0 / k)^{1/3} X \sqrt{2} \sin kx \sin \pi z, \\ \vartheta &= Ra_0 (Y \sqrt{2} \cos kx \sin \pi z - Z \sin 2\pi z),\end{aligned}\quad (12.9)$$

где  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  - амплитуды мод, а  $Ra_0 = k^{-2} (k^2 + \pi^2)^3$ . Подставляя (12.9) в (12.8) и пренебрегая взаимодействиями со всеми остальными модами, можно получить для  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  следующую систему уравнений, известную как модель Лоренца (Lorenz, 1963):

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY,\end{aligned}\quad (12.10)$$

где точкой обозначено дифференцирование по  $\tau = (k^2 Ra_0)^{1/3} t$ , величина  $\sigma = Pr$ , параметр  $b = 4\pi^2 (k^2 Ra_0)^{-1/3}$  есть т.н. геометрический фактор (при  $k = \pi / \sqrt{2}$  равный  $8/3$ ), а величина  $r = Ra/Ra_0$  - относительное число Рэлея. Система уравнений (12.10) обладает симметрией: их вид не изменится, если произвести одновременно замены  $X \rightarrow -X$  и  $Y \rightarrow -Y$ . Это означает, что любое множество, образуемое траекториями системы Лоренца в трехмерном фазовом пространстве, будет обладать той же самой симметрией.

Если ввести новую переменную  $W = (r - 1)Z$ , то систему (12.10) можно переписать в следующем виде (Кузнецов, 2001):

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -Y + XW, \\ \dot{W} &= -bW - XY + br.\end{aligned}\quad (12.11)$$

Умножая первое из уравнений (12.11) на  $X/\sigma$ , второе на  $Y$ , а третье на  $W$ , и затем получившиеся выражения складывая, можно получить следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{X^2 / \sigma + Y^2 + W^2}{2} \right) = - \left( X - \frac{1}{2} Y \right)^2 - \frac{3}{4} Y^2 - b \left( W - \frac{1}{2} r \right)^2 + \frac{1}{4} br^2. \quad (12.12)$$

Если теперь ввести в трехмерном фазовом пространстве  $(X, Y, W)$  область  $D$ , задаваемую неравенством

$$\left( X - \frac{1}{2} Y \right)^2 + \frac{3}{4} Y^2 + b \left( W - \frac{1}{2} r \right)^2 \leq \frac{1}{4} br^2,$$

то очевидно, что вне этой области правая часть уравнения (12.12) отрицательна. Если теперь определить семейство эллипсоидов  $X^2 / \sigma + Y^2 + W^2 = \text{const}$  и выбрать значение константы настолько большим, чтобы соответствующий эллипсоид  $E$  включал в себя область  $D$ , то на поверхности  $E$  всюду будет выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}(X^2 / \sigma + Y^2 + W^2) < 0, \quad (12.13)$$

т.е. находящееся под знаком производной выражение убывает с течением времени. Это означает, что все траектории, пересекающие поверхность эллипсоида  $E$ , ведут только внутрь ограниченной ею области. Удобно рассмотреть векторное поле в фазовом пространстве, зависимость трех компонент которого от координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  задается правыми частями уравнений (12.10):

$$\vec{L}(X, Y, Z) = [\sigma(Y - X), rX - Y - XZ, -bZ + XY].$$

Дивергенция этого поля определяется соотношением  $\text{div} \vec{L} = -D = -(\sigma + b + 1)$ , так что если параметры  $\sigma$  и  $b$  положительны, то эта величина постоянна и отрицательна. Пусть имеется ансамбль одинаковых систем Лоренца, отличающихся лишь начальными условиями, занимающими в фазовом пространстве некоторый объем  $V = V_0$ . Со временем объем  $V$  будет уменьшаться:  $V = V_0 \exp(-Dt)$ , так что все точки, определяющие состояние систем ансамбля, сосредоточатся на некотором множестве нулевого объема – *аттракторе*, который согласно (12.13) должен располагаться в ограниченной области фазового пространства.

Стационарные точки системы (12.10) можно определить как решение следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma(Y - X) &= 0, \\ rX - Y - XZ &= 0, \\ -bZ + XY &= 0, \end{aligned} \quad (12.11)$$

одним из которых при любых значениях параметров системы является точка  $O(0, 0, 0)$ , отвечающая состоянию равновесия в отсутствие конвекции. При  $r > 1$  система Лоренца имеет еще две неподвижные точки:  $O_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  и  $O_2(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ , соответствующие режиму конвекции – вращению жидкости против или по часовой стрелке (см. рис. 12.1). Эти две точки переходят друг в друга при одновременном изменении знаков  $X$  и  $Y$ . Анализ неподвижных точек на устойчивость можно провести с помощью линеаризованного варианта уравнений (12.10):

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= -\sigma X' + \sigma Y', \\ \dot{Y}' &= (r - Z_0) X' - Y' - X_0 Z', \\ \dot{Z}' &= Y_0 X' + X_0 Y' - bZ', \end{aligned} \quad (12.12)$$

где  $(X', Y', Z') = (X, Y, Z) - (X_0, Y_0, Z_0)$ , а индексом 0 обозначены координаты исследуемой стационарной точки. Решение для возмущений ищется в экспоненциальном виде  $(X', Y', Z') = (X'_0, Y'_0, Z'_0) \exp(\lambda t)$ , что приводит к следующей задаче на собственные числа:

$$\begin{pmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r - Z_0 & -1 - \lambda & -X_0 \\ Y_0 & X_0 & -b - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \\ Z'_0 \end{pmatrix} = 0, \quad (12.13)$$

которая сводится к анализу корней характеристического уравнения

$$(\lambda + \sigma)[(\lambda + 1)(\lambda + b) + X_0^2] + \sigma[(\lambda + b)(Z_0 - r) + X_0 Y_0] = 0. \quad (12.14)$$

Для стационарной точки  $O$ , расположенной в начале координат, формула (12.14) принимает вид уравнения

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda - \sigma(r - 1)] = 0,$$

три корня которого выражаются следующим образом через параметры задачи:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}.$$

Первое и третье из этих собственных чисел всегда отрицательны; второе же собственное число отрицательно лишь при  $r < 1$ . Таким образом, стационарная точка  $O$  устойчива при  $r < 1$  (такой тип неподвижной точки, когда вне зависимости от выбора начальных условий все фазовые траектории стремятся к ней, называется *устойчивым узлом*) и неустойчива при  $r > 1$  (тип *седло-узла*). Этот вывод согласуется с результатом Рэля, согласно которому стационарное состояние, соответствующее покою (отсутствию конвекции), оказывается неустойчивым при превышении критического значения  $r = 1$ , т.е.  $Ra = Ra_0$ .

Для точек  $O_1$  и  $O_2$  характеристическое уравнение (12.14) принимает следующий вид:

$$\lambda^3 + (b + \sigma + 1)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2b(r - 1)\sigma = 0. \quad (12.15)$$

Исследование корней этого уравнения показывает (Кузнецов, 2001), что при значениях  $r$ , слегка превышающих 1, все три собственных числа  $\lambda$  отрицательны. При увеличении  $r$  одно собственное число по-прежнему остается отрицательным, а два других становятся комплексно-сопряженными с отрицательной действительной частью. В системе возникают колебания, которые с течением времени затухают, причем траектории навиваются на неподвижную точку по спирали. Такой тип неподвижной точки называется *устойчивым фокусом*. При дальнейшем увеличении  $r$  действительная часть корней меняет знак и происходит потеря устойчивости (в силу симметрии –

одновременно) состояний  $O_1$  и  $O_2$ . Порог потери устойчивости  $r = r_{cr}$  можно найти, положив действительную часть равной нулю, т.е. приняв  $\lambda = i\omega$ . После подстановки этого выражения в уравнение (12.15) и разделения действительных и мнимых частей получается, что

$$\omega^2 = \frac{2b(r-1)\sigma}{b+\sigma+1}, \quad r_{cr} = \frac{\sigma(b+\sigma+3)}{\sigma-b-1},$$

где в силу положительности  $r$  должно быть  $\sigma > b+1$ . При  $r > r_{cr}$  точки  $O_1$  и  $O_2$  становятся неустойчивыми точками типа *седло-фокус* (характеристическое уравнение имеет один действительный отрицательный корень и два комплексно-сопряжённых с положительной действительной частью).

Пусть значения параметров  $\sigma = 10$  и  $b = 8/3$  фиксированы, а значения параметра  $r$  увеличивается, начиная, например, с  $r = 1$ . С физической точки зрения это означает рост числа Рэлея, что соответствует повышению степени нагрева. Для расчета фазовых портретов системы Лоренца можно воспользоваться специализированным сайтом <http://217.23.81.25/cgi-bin/matweb.exe?mlmfile=lorenz1>, разработанным И.С. Пономаревой и Ю.Ю. Тарасевичем в Астраханском государственном университете. На рис. 12.2 приведен фазовый портрет системы Лоренца, рассчитанный при  $r = 1$ , а на рис. 12.3 – соответствующий график временной эволюции переменной  $X$ . В данном расчете начальные значения переменных  $X_0, Y_0$  и  $Z_0$  были приняты равными 1. Как видно из рисунков, решение системы Лоренца стремится в данном случае к устойчивой неподвижной точке  $O$ , расположенной в начале координат.

**Фазовый портрет**

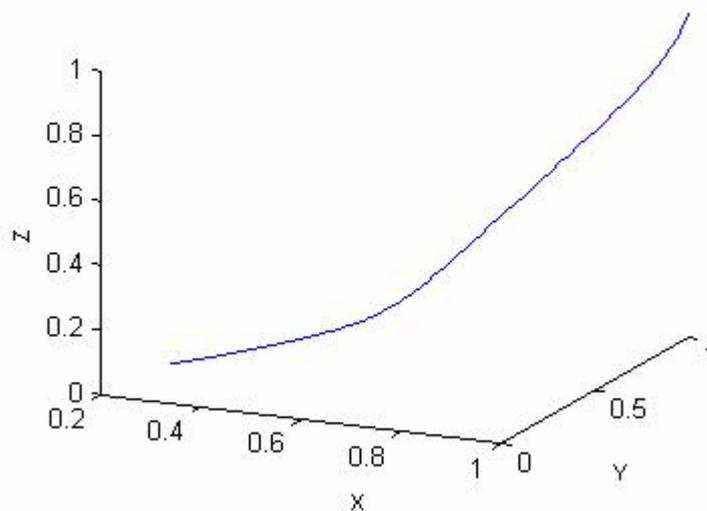


Рис. 12.2. Фазовый портрет системы Лоренца при  $\sigma = 10, b = 8/3, r = 1$ .

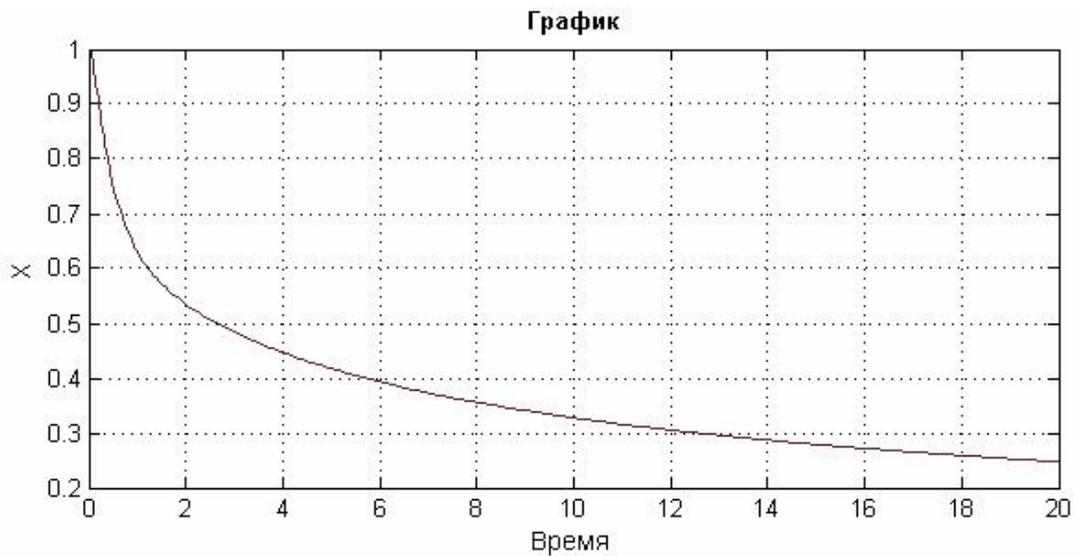


Рис. 12.3. Временная эволюция переменной  $X$ , рассчитанная при  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 1$ .

При  $r > 1$  состояние равновесия  $O$  становится неустойчивым. Если ввести малое возмущение, например, принять в начальный момент  $X_0 = 0.1$ ,  $Y_0 = Z_0 = 0$ , то точка, изображающая решение в фазовом пространстве, будет уходить от равновесной точки вдоль некоторой траектории, именуемой неустойчивой *сепаратрисой* или неустойчивым *многообразием* (см. рис. 12.4). В данном случае это многообразие представляет собой некоторую кривую (поскольку только одно собственное число ответственно за неустойчивость) и потому является одномерным многообразием. График временного хода  $X$ , соответствующий данному случаю, приведен на рис. 12.5. В силу симметрии имеется два неустойчивых многообразия, формирующиеся по разные стороны точки равновесия  $O$ . Из рис. 12.4 и 12.6 видно, что фазовые траектории приближаются к неподвижным точкам  $O_1$  и  $O_2$  по спирали, что соответствует затухающим колебаниям (см. также рис. 12.5).

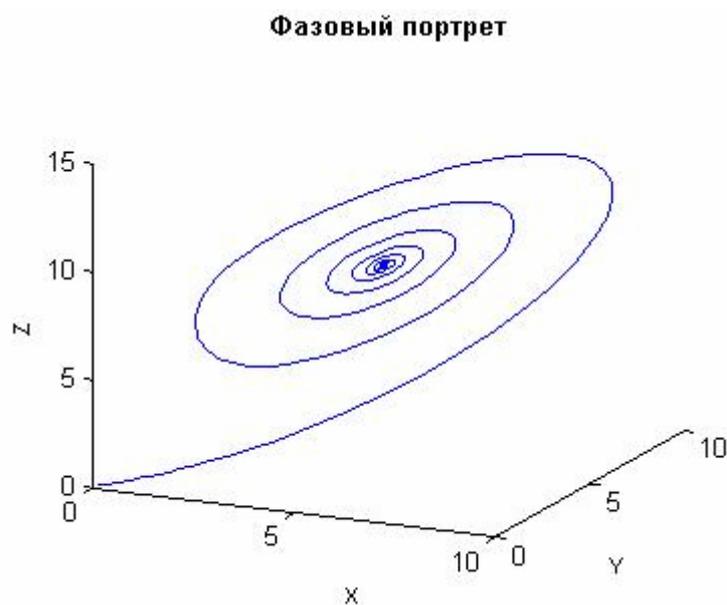


Рис. 12.4. То же, что на рис. 12.2, но при  $r = 10$ ,  $X_0 = 0.1$ ,  $Y_0 = Z_0 = 0$ .

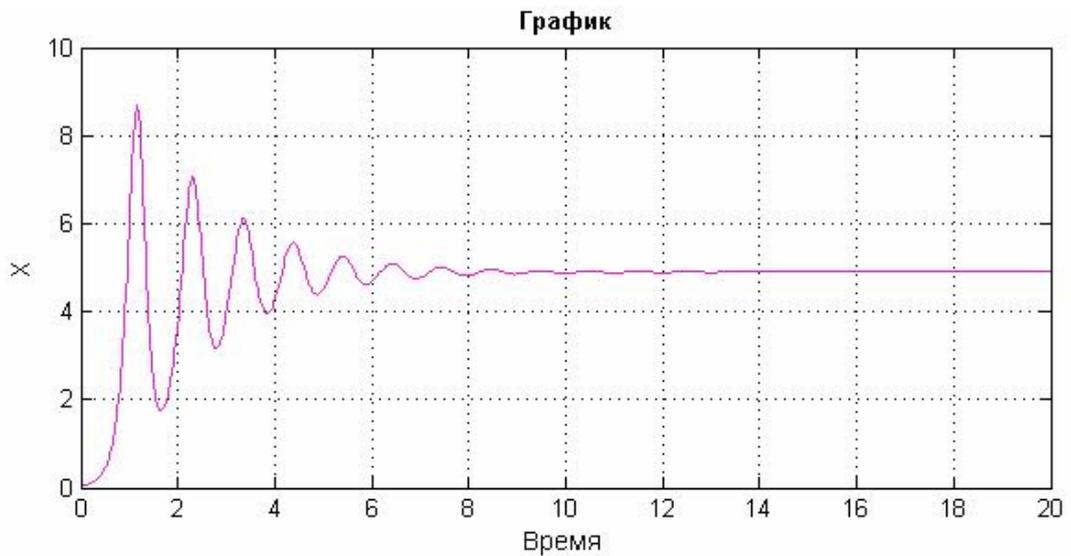


Рис. 12.5. То же, что на рис. 12.3, но при  $r = 10$ ,  $X_0 = 0.1$ ,  $Y_0 = Z_0 = 0$ .

### Фазовый портрет

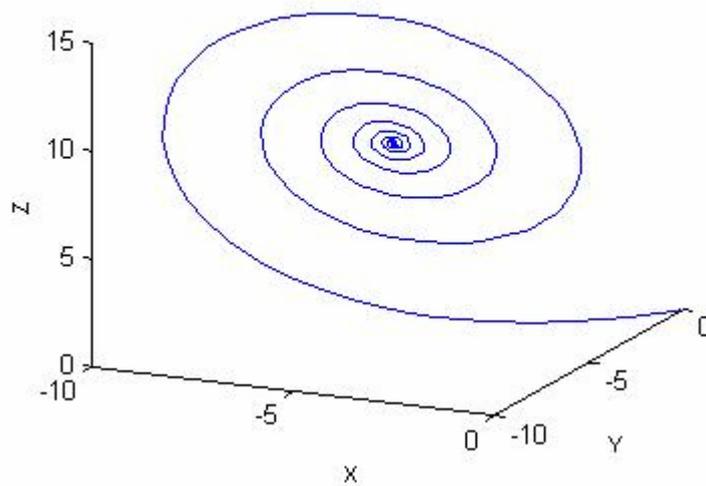


Рис. 12.6. То же, что на рис. 12.4, но при  $X_0 = -0.1$ .

Чем больше значение параметра  $r$ , тем больше амплитуда этих колебаний. При некотором значении  $r = 13.927$  сепаратриса, совершив один оборот, возвращается в начало координат  $O$  вдоль оси  $Z$  (рис. 12.7 и 12.8); говорят, что образовалась *петля сепаратрисы*. Данная ситуация – пример *нелокальной бифуркации*, связанной с такой перестройкой структуры фазовых потоков, которую нельзя свести к локальным изменениям в окрестности какой-нибудь одной точки фазового пространства.

Следующая нелокальная бифуркация имеет место при  $r \approx 24.06$ , характеризующаяся тем, что сепаратрисы не стягиваются теперь к неподвижным точкам  $O_1$  и  $O_2$ , а формируют неустойчивые предельные циклы. Состояния  $O_1$  и  $O_2$  по-прежнему остаются устойчивыми вплоть до значения параметра  $r = 24.74$ . В качестве иллюстрации, на рис. 12.9 и 12.10 приведены фазовый портрет системы и график временного хода переменной  $X$ , рассчитанные при  $r = 24.5$ .

### Фазовый портрет

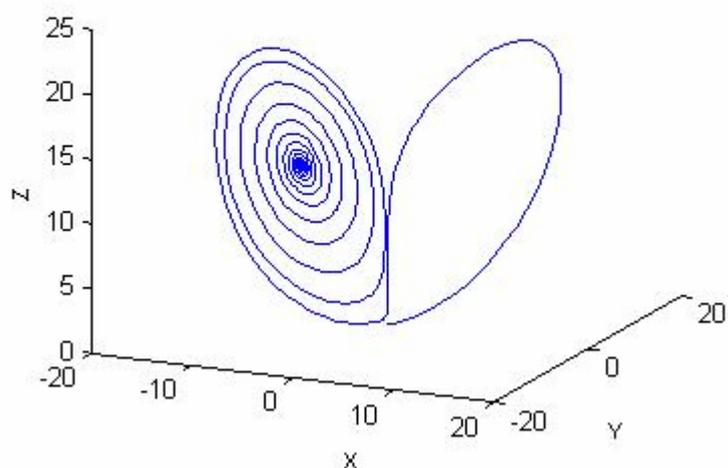


Рис. 12.7. То же, что на рис. 12.4, но при  $r = 13.927$ .

### График

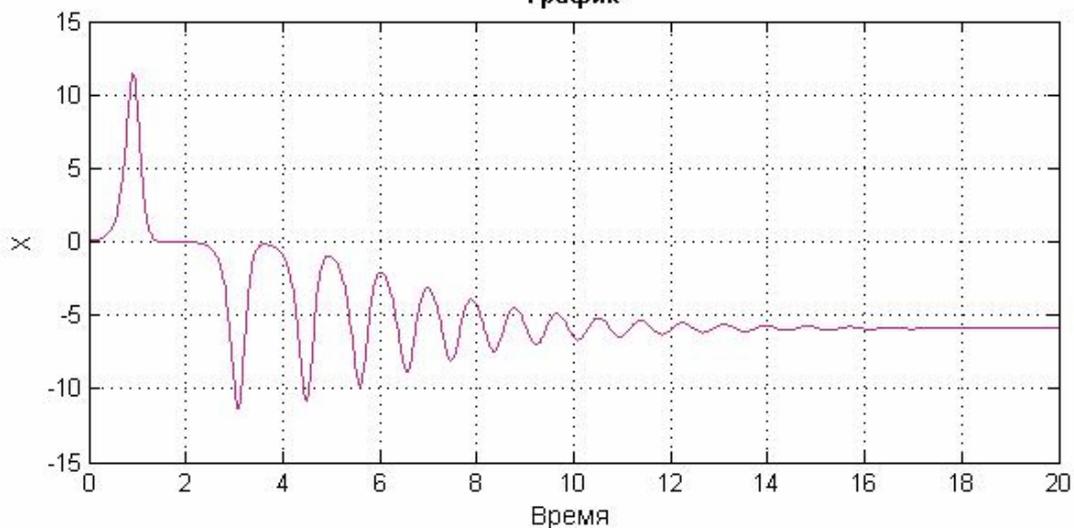


Рис. 12.8. То же, что на рис. 12.5, но при  $r = 13.927$ .

Начиная с  $r \approx 24.74$ , неподвижные точки теряют устойчивость и в фазовом пространстве формируется *аттрактор Лоренца*: траектория делает по несколько оборотов то вокруг одной неустойчивой неподвижной точки (скажем,  $O_1$ ), то вокруг другой неустойчивой неподвижной точки  $O_2$ , меняя их "случайным образом" (рис. 12.11). Эта стохастизация течения Лоренца и связанная с ней перемежаемость во временном ходе описывающих это течение характеристик отчетливо видна на рис. 12.12 и 12.13.

### Фазовый портрет

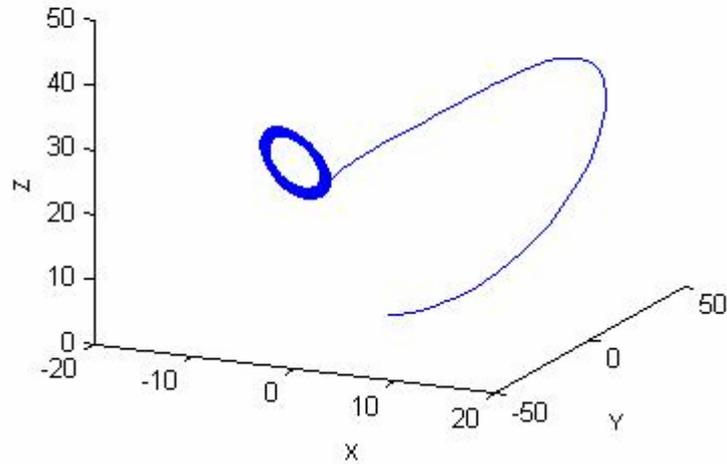


Рис. 12.9. То же, что на рис. 12.7, но при  $r = 24.5$ .

### График

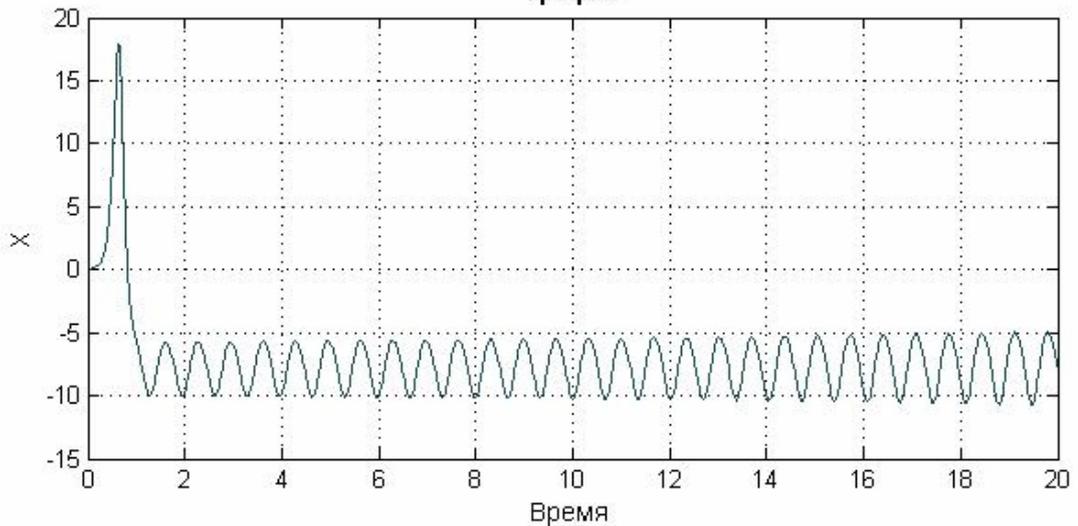


Рис. 12.10. То же, что на рис. 12.8, но при  $r = 24.5$ .

Модель Лоренца имеет прямое отношение к проблеме предсказуемости (Оганесян, 2001). Эволюция динамической системы представляется траекториями в фазовом пространстве, которые в классической динамике однозначно определены для сколь угодно большого промежутка времени. Еще в начале 60-х годов XX века Лоренц задался вопросом: почему стремительное совершенствование компьютеров, математических моделей и вычислительных алгоритмов не привело к созданию достоверных среднесрочных прогнозов погоды? Анализ предложенной им модели привел к принципиальному результату: для динамического хаоса возможен лишь весьма ограниченный временной срок прогноза. Связано это с тем, что динамическому хаосу соответствует «клубок» расходящихся траекторий, причем от скорости их расходимости зависит интервал времени (не превышающий двух-трех недель), на который может быть дан прогноз. Бурно развивающаяся с середины прошлого века нелинейная динамика окончательно развеяла иллюзию «глобальной предсказуемости», но дала исследователям достаточно мощный

инструментарий для анализа разнообразных процессов с ограниченным сроком прогноза. Особую важность при этом представляют описание и предсказание редких катастрофических событий.

### Фазовый портрет

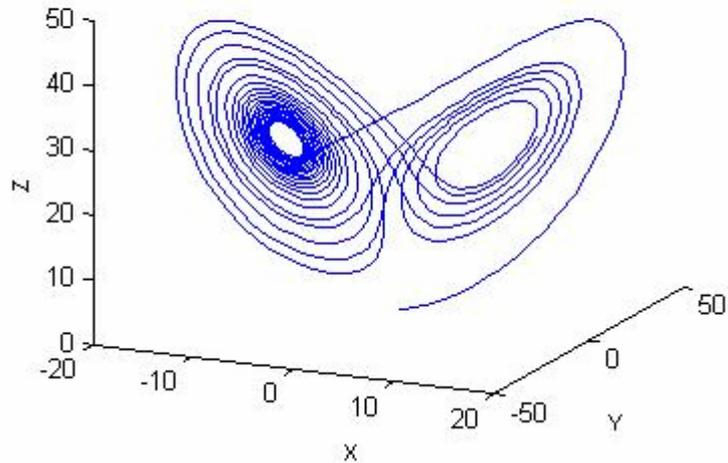


Рис. 12.11. То же, что на рис. 12.3, но при  $r = 28$ .

### График

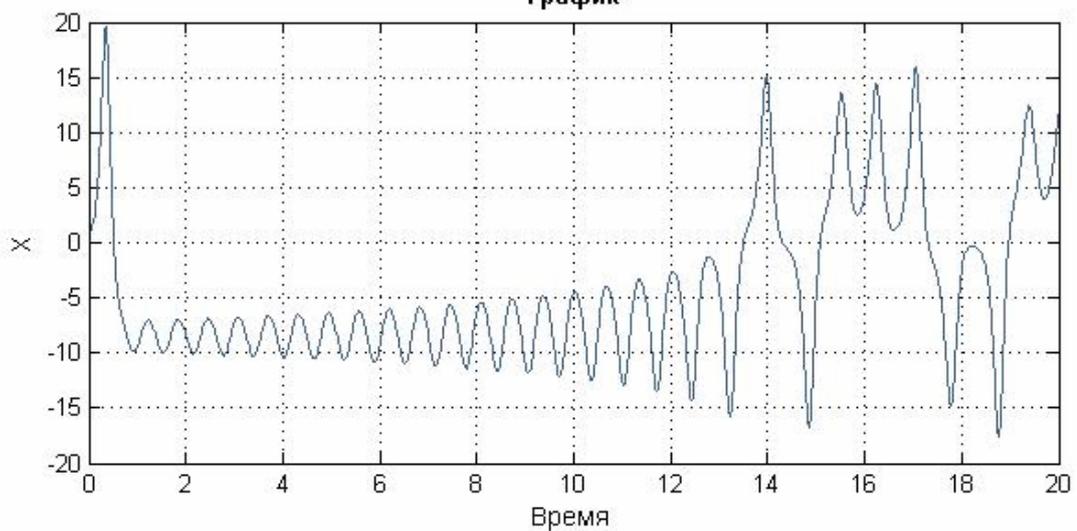


Рис. 12.12. То же, что на рис. 12.4, но при  $r = 28$ .

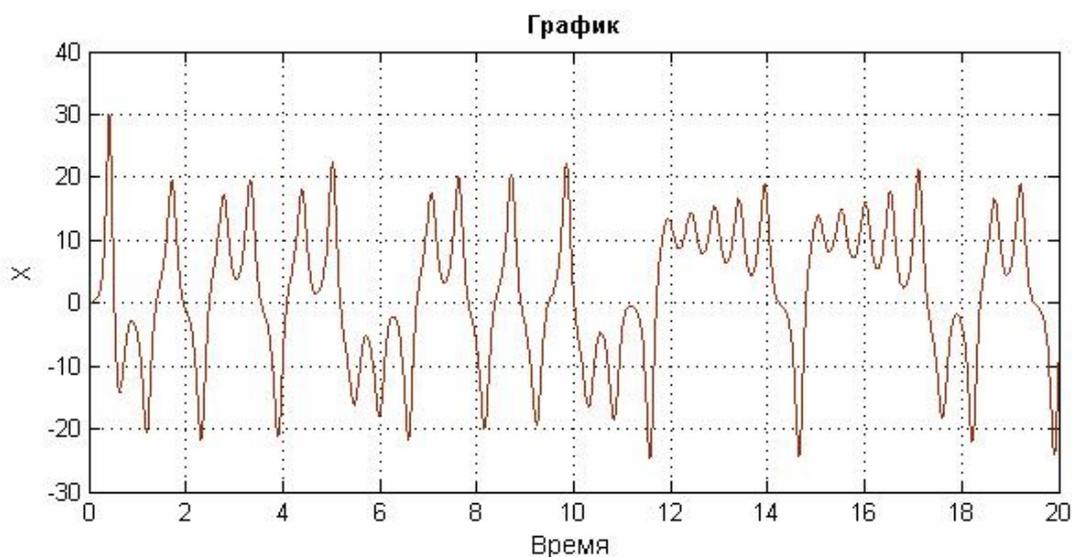


Рис. 12.13. То же, что на рис. 12.10, но при  $r = 50$ .

## Литература

- Бурман Э.А. Местные ветры. – Л.: Гидрометеиздат, 1969, 341 с.
- Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – Пер. с английского Л.В. Соколовской под ред. Г.И. Баренблатта и В.П. Шидловского, М.: Мир, 1986 (электронная версия: [http://www.imec.msu.ru/content/nio/VanDaik/vd\\_main.html](http://www.imec.msu.ru/content/nio/VanDaik/vd_main.html)).
- Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1996, 399 с.
- Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984, 318 с.
- Гутман Л.Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1969, 295 с.
- Зилитинкевич С.С., Лайхтман Д.Л., Монин А.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. – Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1967, т. 3, № 3, с. 297-333.
- Казаков А.Л., Лыкосов В.Н. О параметризации взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью при численном моделировании атмосферных процессов. – Труды ЗапСибНИИ, 1982, вып. 55, с. 3-20.
- Калажиков Х.Х. К теории высотных фронтов. – Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1967, № 11.
- Келлер Л.В., Фридман А.А. Differentialgleichung für die turbulente Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit. – Proc. 1-st Intern. Congr. Appl. Mech., 1924, Delft, p. 395-405.
- Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. – Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, т. 6, № 1-2, с. 56-68.
- Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, т. 1 и 2. – М.: Физматгиз, 1963.
- Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). – М.: Изд. физ.-мат. Литературы, 2001, 296 с.
- Курбацкий А.Ф. Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. – Новосибирск: Наука, 1988, 240 с.
- Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. Трехпараметрическая модель турбулентности для пограничного слоя атмосферы над урбанизированной поверхностью. – Известия АН, Физика атмосферы и океана, 2006, т. 42, № 4, с. 476-494.
- Ландау Д.Л., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. – М.: Гостехиздат, 1951.
- Ландау Д.Л., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1953.

- Лыкосов В.Н. О проблеме замыкания моделей турбулентного пограничного слоя с помощью уравнений для кинетической энергии турбулентности и скорости её диссипации. - Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1992, т. 28, 696-704.
- Миллионщиков М.Д. К теории однородной изотропной турбулентности. – Докл. АН СССР, 1941, т. 32, № 9, с. 611-614.
- Монин А.С. О характеристиках анизотропной турбулентности. – Докл. АН СССР, 1950, т. 75, № 5, с. 621-624.
- Монин А.С., Обухов А.М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. – Труды Геофиз. инст. АН СССР, 1954, № 24 (151), с. 163-187.
- Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 1. – М.: Наука, 1965, 639 с.
- Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 2. – М.: Наука, 1967, 720 с.
- Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Том 1. – С.-Пб: Гидрометеиздат, 1992, 694 с.
- Монин А.С. Гидродинамическая неустойчивость. – Успехи физических наук, 1986, т. 150, вып. 1, с. 61-105.
- Обухов А.М. Турбулентность в температурно-неоднородной атмосфере. – Труды Ин-та теорет. геофиз. АН СССР, 1946, т. 1, с. 95-115.
- Обухов А.М. Статистическое описание непрерывных полей. - Тр. Геофиз. Ин-та АН СССР, 1954, № 24(151), с. 3 - 42.
- Оганесян Т. За горизонтом предсказуемости. – Эксперт, 2001, № 27(287).
- Сперанская Е.А. Исследование влияния неровностей и термических неоднородностей подстилающей поверхности на движение воздушной массы. – Ленинградский гидрометеорологический институт, дипломная работа, 1971, 54 с.
- Хргиан А.Х. Аэрологическое исследование горно-долинных ветров. – Труды ЦАО, 1947, вып. 2.
- Хргиан А.Х. Физика атмосферы. Том 2. – Л.: Гидрометеиздат, 1978, 319 с.
- Хромов С.П., Мамонтова Л.И. Метеорологический словарь. – Л.: Гидрометеиздат, 1974, 569 с.
- Хромов С.П., Петросянц М.А. Метеорология и климатология. – М.: Изд-во МГУ, 2001, 528 с.
- Шапошникова М.И., Лыкосов В.Н., Гутман Л.Н. Нестационарная нелинейная задача о бризе в устойчиво стратифицированной атмосфере. – Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1968, т. 4, № 2.
- Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969.
- Akerblom F. Recherches sur les courants les plus bas de l'atmosphère au-dessus de Paris. - Nova Acta Reg. Soc. Sci., Uppsala, 1908, Ser. 4, 2, 1-45.
- Andre J.C. A third-order-closure model for the evolution of a convective planetary boundary layer. – In: Seminars on the treatment of the boundary layer in numerical weather prediction, Reading, 6-10 September 1976, p. 205-233.
- Andre J.C., de Moor G., Lacarrere P., du Vachat R. Turbulence approximation for inhomogeneous flows. Part I: the clipping approximation. – J. Atmos. Sci., 1976, v. 33, p. 476-481.
- Aupoix B., Cousteix J., Liandrat J. MIS: a way to derive the dissipation equation. – Turbulent shear flows 6, Springer-Verlag, 1989, p. 6-17.
- Barenblatt G.I., Golitsyn G.S. Local structure of mature dust storms. – J. Atmos. Sci., 1974, v. 31, p. 1917-1933.
- Beljaars A.C.M., Holtslag A.A.M. Flux parameterization over land surfaces for atmospheric models. – J. Appl. Meteorol., 1991, v. 30, p. 327-341.
- Blackadar A.K. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere.

- J. Geophys. Res., 1962, v. 67, p. 3095-3102.
- Boussinesq J. Théory de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes á grande section, I-II, 1897, Paris, Gauthier-Villars.
- Brown R.A. Analytical methods in planetary boundary layer modeling. – Adam Hilger, London, 1974 (русский перевод: Браун Р.А. Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1978, 151 с.)
- Businger J.A., Wyngaard J.C., Izumi I., Bradley E.F. Flux profile relationships in the atmospheric surface layer. – J. Atmos. Sci., 1971, v. 28, p. 181-189.
- Carl M.D., Tarbell T.C., Panofsky H.A. Profiles of wind and temperature from towers over homogeneous terrain. – J. Atmos. Sci., 1973, v. 30, p. 788-794.
- Chamberlain A.C. Roughness length of sea, sand, and snow. – Boundary-Layer Meteorol., 1983, v. 25, p. 405-409.
- Charnock H. Wind stress on a water surface. – Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1955, v. 81, p. 639-640.
- Coles D. The law of the wall in turbulent shear flows. – 50 Jahre Grenzschichtforschung, Vieweg, Braunschweig, 1955, S. 153-163.
- Dyer J.A. A review of flux-profile relationships. – Boundary-Layer Meteorol., 1974, v. 7, p. 363-372.
- Ekman V.W. On the influence of the Earth's rotation on ocean-currents. – Arkiv for Matematik, Astronomy och Fysik, 1905, No. 2(11), 1-52.
- Etling D. The stability of Ekman boundary layer flow as influenced by temperature stratification. – Beitrage zur Physik der Atmos., 1971, B. 44, S. 168.
- Frisch U. Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov. - Cambridge University Press, 1995, Cambridge, England.
- Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. – J. Stat. Phys., 1978, v. 19, p. 25-52.
- Garratt J.R., Hicks B.B. Momentum, heat and water vapour transfer to and from natural and artificial surfaces. – Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1973, v. 99, p. 680-689.
- Hansen M. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eigentauchten Platte. – Z. angew. Math. Mech., 1928, B. 8, Nr. 2, S. 185-199.
- Kármán Th. von. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. – Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1930, S. 58-76.
- Kestin J., Richardson P.D. Heat transfer across turbulent, incompressible boundary layers. – Intern. J. Heat Mass Transfer, 1963, v. 6, No. 2, p. 147-189.
- Lewis W., Perkins P.J. Recorded pressure distribution in the outer portion of a tornado vortex. – Mon. Wea. Rev., 1953, v. 81, p. 379 – 385.
- Lin C.C. Theory of hydrodynamic stability. – Cambridge University Press, 1945, 155 p. (русский перевод: Цзя-цзяю Линь. Теория гидродинамической устойчивости. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958).
- Lorenz E.N. Deterministic non-periodic flow. – J. Atmos. Sci., 1963, v. 20, p. 130-141.
- Lumley J.L. Some comments on turbulence. – Phys. Fluids A, 1992, v. 4, p. 203-211.
- Lykossov V.N., Wamser C. Turbulence intermittency in the atmospheric surface layer over snow-covered sites. – Boundary-Layer Meteorol., 1995, v. 72, p. 393-409.
- Margules M. Über Temperaturschichtung in stationär bewegter und in ruhender Luft. – Meteorologische Zeitschrift, 2006, Hann-Band, S. 243.
- McWilliams J.C. Fundamentals of geophysical fluid dynamics. - Cambridge University Press, 2006, Cambridge, England, 249 p.
- Mellor G.L., Yamada T. A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers. – J. Atmos. Sci., 1974, v. 31, No. 7, p. 1791-1806.
- Mellor G.L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. – Rev. of Geoph. And Space Phys., 1982, v. 20, No. 4, p. 851-875.
- Nikuradse J. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren. – VDI-

- Forschungsheft, 1932, Nr. 356 (русский перевод в сб. «Проблемы турбулентности», М.-Л., ОНТИ, 1936, с. 75-150).
- Nikuradse J. Strömungs Gesetze in rauhen Röhren. - VDI-Forschungsheft, 1933, Nr. 361.
- Ogura Y. A consequence of the zero - fourth cumulant - approximation in the decay of isotropic turbulence. – J. Fluid Mech., 1963, v. 16, p. 33-40.
- Oke T.R. Boundary layer climates. – London, Methuen & Co Ltd, a Halsted Press Book, John Wiley & Sons, New York, 1978 (русский перевод: Оке Т.Р. Климаты пограничного слоя. – Л.: Гидрометеиздат, 1982, 360 с.)
- Paulson C.A. The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. – J. Appl. Meteorol., 1970, v. 9, p. 857-861.
- Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. – Commun. Math. Phys., 1980, v.74, p. 189.
- Prandtl L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. – Zs. Angew. Math. Mech., 1925, B. 5, Nr. 2, S. 136-139.
- Prandtl L. Meteorologische Anwendungen der Strömungslehre. – Beitr. Phys. fr. Atmosph., 1932, B. 19, Nr. 3, S. 188-202.
- Prandtl L. Führer durch die Strömungslehre, 3ed., Braunschweig, F. Vieweg, 1949 (русский перевод: Л. Прандтль, Гидроаэромеханика, М., ИЛ, 1951).
- Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. - Cambridge University Press, Scientific Papers, 1880, No. 1, p. 474—487.
- Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. – Sci. Papers, 1916, v. 6, p. 432 – 443.
- Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. – Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1883, v. 174, p. 935-982.
- Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. – Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1894, v. 186, p. 123-161 (русск. перевод в сб. «Проблемы турбулентности», М.:ОНТИ, 1936, с. 185-227).
- Rotta J.C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 1, Zs. Phys., 1951, B. 129, Nr. 5, S. 547-572.
- Rotta J.C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 2, Zs. Phys., 1951, B. 131, Nr. 1, S. 51-77.
- Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. – Commun. Math. Phys., 1971, v. 20, p. 167-192.
- Tollmien W. Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. - Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1935, B. 50, S. 79—114.
- Taylor G.I. Eddy motion in the atmosphere. – Phil. Trans. Roy. Soc., 1915, v. A215, p. 1-26.
- Taylor G.I. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. – Proc. Roy. Soc., 1932, v. A135, No. 828, p. 685-706.
- Taylor P.A., Dyer K.R. Theoretical models of flow near the bed and their applications for sediment transport. – In: The Sea, v. 6, E.D. Colberg, Ed. Wiley-Interscience, New-York, 1977, p. 579-601.
- Wamser C., Lykossov V.N. On the friction velocity during blowing snow. - Beitr. Phys. Atmosph., 1995, v. 68, p. 85-94.
- Willis G.E., Deardorff J.M. A laboratory model of the unstable planetary boundary layer/ - J. Atmos. Sci., 1974, v. 31, p. 1297-1307.
- Zeman O., Lumley J.L. Modeling buoyancy-driven mixed layers. – J. Atmos. Sci., 1976, v. 33, p. 1974-1988.